



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

ENERGETICKÝ ÚSTAV

ENERGY INSTITUTE

PULSACE TOKU KAPALINY V PRUŽNÉ TRUBICI

PULSE FLOW OF LIQUID IN FLEXIBLE TUBE

DIPLOMOVÁ PRÁCE

MASTER'S THESIS

AUTOR PRÁCE

AUTHOR

Bc. Miroslav Komoráš

VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

Ing. Roman Klas, Ph.D.

BRNO 2019

Zadání diplomové práce

Ústav: Energetický ústav
Student: **Bc. Miroslav Komoráš**
Studijní program: Strojní inženýrství
Studijní obor: Fluidní inženýrství
Vedoucí práce: **Ing. Roman Klas, Ph.D.**
Akademický rok: 2018/19

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma diplomové práce:

Pulsace toku kapaliny v pružné trubici

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Svým charakterem představuje práce kombinovanou úlohu zahrnující základní pevnostní analýzu a CFD simulaci proudění v pružné trubici. Simulace vzájemné interakce stále představuje časově náročnou úlohu, kterou lze řešit na podkladě numerických FSI simulací prostřednictvím komerčních softwarových kódů využívajících metodu konečných prvků a konečných objemů, anebo na podkladě jednorozměrných matematicko-fyzikálních modelů. Diplomová práce tedy kombinuje oba tyto přístupy ve snaze predikovat tok kapaliny trubicí s ohledem na velikost tlaku a průtoku a stejně tak usiluje o předpověď velikosti deformace trubice.

Cíle diplomové práce:

Diplomová práce bude rozdělena na dvě hlavní části. Výstupem prvního celku bude sestavení hlavních rovnic na základě jednorozměrného přístupu popisujících svázaný model trubice a kapaliny. Tyto rovnice budou mít charakter pohybové rovnice, rovnice kontinuity a rovnice rovnováhy silově zatížené trubice na podkladě základních konstitutivních vztahů lineárních i nelineárních materiálů. Pro zadané parametry, které se budou opírat o data známá z experimentu, student stanoví časové průběhy průtoku, tlaku v trubici a velikosti deformace trubice. V druhé části práce uskuteční simulaci interakce kapaliny a trubice prostřednictvím metody konečných prvků a konečných objemů a dosažené výsledky porovná s výstupy z jednorozměrných modelů a známého experimentálního měření.

Seznam doporučené literatury:

ŠOB, František. Hydromechanika. Brno: CERM, 2002. Učební texty vysokých škol. ISBN 80-214-2037-5.

JANÍČEK, Přemysl, Emanuel ONDRÁČEK, Jan VRBKA a Jiří BURŠA. Mechanika těles: pružnost a pevnost I. Třetí přepracované vydání. Brno: Akademické nakladatelství CERM, 2004. ISBN 80-214-2592-X.

Termín odevzdání diplomové práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2018/19

V Brně, dne

L. S.

doc. Ing. Jiří Pospíšil, Ph.D.

ředitel ústavu

doc. Ing. Jaroslav Katolický, Ph.D.

děkan fakulty

ABSTRAKT

Tato diplomová práce se zabývá analýzou pulzací toku kapaliny v pružné trubici představující např. tepnu v lidském těle. V programu ANSYS proběhly 3D simulace a jedná se o takzvané svázané FSI analýzy. V softwaru Maple proběhly 1D simulace proudění kapaliny v trubici z hlediska různých tenkostěnných a silnostěnných variant. Cílem je pomocí těchto programů určit průtoky a tlaky v trubici, její deformaci stěn a napjatost. Teoretická část se tedy převážně zabývá základními rovnicemi dynamiky proudění, lineárními a nelineárními modely a rotačně symetrickými nádobami. Ve výpočetní části jsou popsány jednotlivé postupy v uvedených programech.

Klíčová slova

pružná trubice, pulsace, kapalina, proudění, strukturální analýza, metoda konečných prvků, metoda konečných objemů, pohybové rovnice, lineární model materiálu, nelineární model materiálu, rotačně symetrické nádoby, tenkostěnné těleso, silnostěnné těleso, tlak, napětí, tepna, ANSYS, Maple

ABSTRACT

This master's thesis is dealing with analysis of fluid flow pulse in a flexible tube representing e.g. an artery in a human body. In ANSYS program, 3D simulations were performed, and these are so-called interrelated FSI analysis. In Maple software, 1D simulations of fluid flow in the tube were performed for various thin-walled and thick-walled variants. The aim is using these programs to determine the flow rates and pressures in the tube, its wall deformation and stress. Therefore, the theoretical part deals mainly with basic equations of flow dynamics, linear and nonlinear models and rotationally symmetric vessels. In the computational part are described individual procedures in the mentioned programs.

Key words

flexible tube, pulsation, fluid, convection, structural analysis, finite element method, finite volume method, equations of motion, linear material model, nonlinear material model, rotationally symmetric vessels, thin-walled structures, thick-walled structures, pressure, stress, artery, ANSYS, Maple

BIBLIOGRAFICKÁ CITACE

KOMORÁŠ, Miroslav. *Pulsace toku kapaliny v pružné trubici*. Brno, 2019. Dostupné také z: <https://www.vutbr.cz/studenti/zav-prace/detail/117164>. Diplomová práce. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, Energetický ústav. Vedoucí práce Roman Klas.

PROHLÁŠENÍ

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci na téma **Pulsace toku kapaliny v pružné trubici** vypracoval samostatně pod vedením Ing. Romana Klase, Ph.D. s použitím odborné literatury a pramenů, uvedených a citovaných v seznamu použité literatury této práce.

V Brně dne 30. 5. 2019

.....

Bc. Miroslav Komoráš

PODĚKOVÁNÍ

Tímto bych chtěl poděkovat Ing. Romanu Klasovi, PhD. za vedení mé diplomové práce, konzultace a cenné rady. Také bych chtěl poděkovat své rodině i přátelům, kteří mi byli po celou dobu studia oporou.

OBSAH

1	ÚVOD	13
2	TEORETICKÁ ČÁST	15
2.1	Hlavní rovnice popisující proudění kapaliny v trubici	15
2.1.1	Rovnice kontinuity	15
2.1.2	Pohybové rovnice	17
2.1.2.1	Bernoulliho rovnice	17
2.1.2.2	Navier-Stokesova rovnice	17
2.1.3	Elektrohydraulická analogie	18
2.2	Základní lineární a nelineární modely materiálů stěny trubice	20
2.2.1	Lineární modely	20
2.2.1.1	Hookeovský	20
2.2.2	Nelineární modely	22
2.2.2.1	Neo-Hookeovský	23
2.2.2.2	Mooney-Rivlin	24
2.3	Popis a rozbor napětí v rotačně symetrických nádobách	26
2.3.1	Rotačně symetrické nádoby	26
2.3.2	Hooke	26
2.3.2.1	Silnostěnné těleso	26
2.3.2.2	Tenkostěnné těleso	27
2.3.3	Neo-Hooke	28
2.3.3.1	Silnostěnné těleso	28
2.3.4	Mooney-Rivlin	29
2.3.4.1	Silnostěnné těleso	29
2.3.5	Ovalita trubice	29
2.4	Rozdíly mezi 1D a 3D modelováním	30
2.5	Základní numerické metody	31
2.5.1	Metoda konečných objemů (MKO)	31
2.5.2	Metoda konečných prvků (MKP)	31
2.6	Simulační software ANSYS	33
2.6.1	Workbench	33
2.6.2	DesignModeler	33

2.6.3	Mesh	34
2.6.4	Fluent	34
2.6.5	Mechanical	34
3	VÝPOČETNÍ ČÁST	35
3.1	Modelování v programu ANSYS	35
3.1.1	Geometrie trubice a kapaliny	35
3.1.2	Mesh trubice a kapaliny	36
3.1.3	Nastavení numerického výpočtu kapaliny ve Fluentu.....	36
3.1.4	Nastavení strukturální analýzy trubice	38
3.2	Modelování v programu Maple	40
4	VÝSLEDKY POZOROVÁNÍ A DISKUZE.....	41
4.1	Kvalita výpočetní sítě	41
4.2	Objemové průtoky v trubici.....	41
4.3	Rozbor proudění v trubici.....	44
4.4	Statické tlaky v trubici	47
4.5	Napětí na stěnách trubice.....	49
4.6	Změna průměru a tloušťky trubice	54
5	ZÁVĚR	59
6	SEZNAM POUŽITÝCH ZDROJŮ	61
7	SEZNAM OBRÁZKŮ A TABULEK	65
8	SEZNAM POUŽITÝCH SYMBOLŮ A ZKRATEK	67
	PŘÍLOHA A: UDF	71
	PŘÍLOHA B: POUŽITÉ KÓDY V PROGRAMU MAPLE.....	73
	PŘÍLOHA C: ZBÝVAJÍCÍ GRAFY	89

1 ÚVOD

Tato práce se zabývá pulzacemi protékající kapaliny pružnou trubicí představující cévní náhradu a pulzací samotné trubice. Úloha je kombinovaná FSI analýza a zahrnuje modelování, jak jednorozměrné, v programu Maple, tak trojrozměrné, v programovém balíčku ANSYS. U obou softwarů k výpočtu použijeme matematicko-fyzikální modely. Ve 3D počítáme pomocí časově náročných CFD simulací a pevnostní analýzy silně deformovatelný a s kapalinou interagující povrch trubice, využívající metod konečných objemů (MKO) a konečných prvků (MKP). Tato práce souvisí s prací Dominika Šedivého [1].

V teoretické části práce je zpracována řešerše týkající se základních rovnic dynamiky proudění (rovnice kontinuity a pohybové rovnice), lineárních a nelineárních modelů materiálů, rozboru napětí v rotačně symetrických nádobách tenkostěnných i silnostěnných, základních numerických metod (MKO a MKP) a také jsou popsány jednotlivé části simulačního softwaru ANSYS.

Protože nelze vytvořit 2D strukturální simulaci v kombinaci s 2D CFD simulací, je pro výpočet vhodné udělat čtvrtinový 3D model, tzn. že z důvodu symetrie stačí vymodelovat pouze čtvrtku trubice a tekutiny. Cílem výpočetní části práce je vyhodnocení dat primárně ze tří částí délky trubice a kapaliny, čtvrtiny, poloviny a tří čtvrtiny. Hlavním zájmem jsou časové průběhy tlaku a průtoku média v trubici, dále velikosti deformace a napětí trubice. Také budou určeny jednotlivé rychlostní profily ve směru os x , y a z . Výsledky z obou případů budou porovnány jak mezi sebou, tak se známými daty z experimentálního měření.

Jedním z problémů jsou výpočetní nároky 3D simulace pulzací a jednotlivé výpočty tak mohou trvat dlouhou dobu. Výpočty stihly proběhnout čtyři, první s nelineárním neo-Hookeovským materiálovým modelem trubice, druhý s klasickým lineárním Hookeovským modelem, třetí s nelineárním modelem Mooney-Rivlin a čtvrtý, pro srovnání výpočtů, s jednoduchým modelem obsahujícím pouze kapalinu, kde trubicí nahrazuje po celé délce pouze okrajová podmínka wall s podmínkou ulpívání a jedná se tak o tuhou trubicí. Proudícím médiem je voda a materiál trubice tvoří Tygon, který se běžně používá pro lékařské účely. Mezi jedno z možných uplatnění Tygonových pružných trubic je kromě jiného právě náhrada cév.

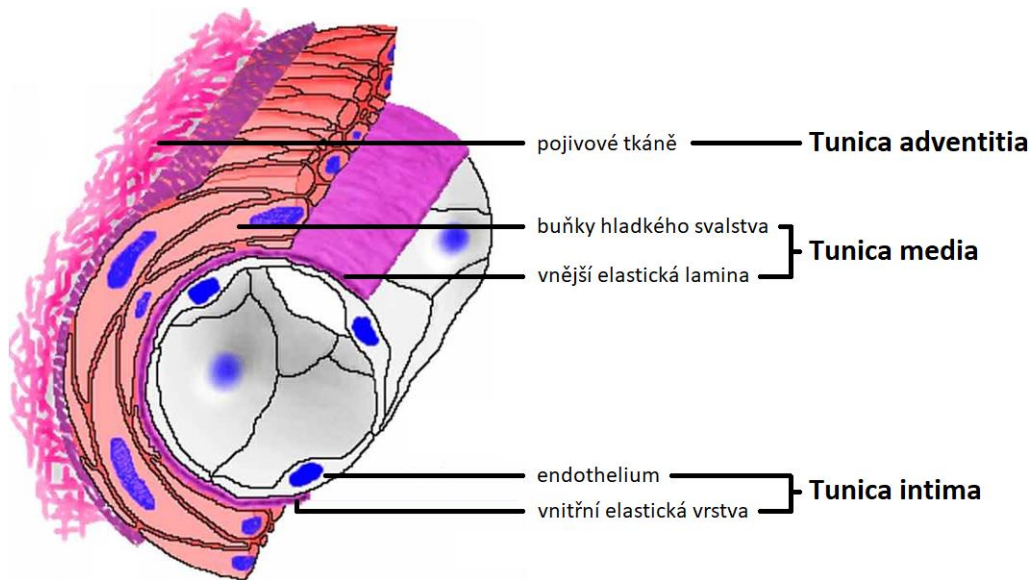
Cévy tvoří uzavřený krevní oběh a po směru proudu je můžeme rozdělit na tepny (artérie), tepénky (arterioly), vlásečnice (kapiláry), žilky a žíly (vény). Tepny a tepénky rozvádějí okysličenou krev ze srdce a dodávají tak kyslík do tkání a orgánů. Tepny jsou z cév nejsilnější, jsou elastické a díky proudu krve se pod vysokým tlakem deformují. Stěna tepny se skládá ze tří hlavních odlišných vrstev, znázorněných na (Obr. 1), které se směrem od vnitřku nazývají tunica intima, tunica media a tunica adventitia. Po průtoku nejjemnějšími rozvětvenými vlásečnicemi se krev dostává do žilek a nakonec žil, kde je již neokysličená a teče zpět do srdce. [2; 3]

Cévní náhrady se vyrábějí tak, aby se jejich mechanické vlastnosti co nejvíce blížily vlastnostem cév, což jsou živé elastické trubice. Jejich napětí stěn σ se přibližně řídí dle Laplaceova zákona, jehož vztah je uveden níže. [3; 4; 5; 6]

$$\sigma = \frac{p \cdot r_1}{s} \quad (1.1)$$

kde: p hydrostatický tlak uvnitř cévy (krevní tlak) [Pa],
 r_1 vnitřní poloměr trubice [m],
 s tloušťka trubice [m].

Ze vztahu plyne, že největší napětí způsobené šířením vln je u cév s velkými tlaky a průměry, tudíž u tepen, kde se pulzace toku krve projevují nejvíce. Cévních náhrad se tedy používá např. při mechanickém porušení tepny, zneprůchodnění tepny, či chirurgickém odstranění výdutě, přičemž výduť je způsobena prasknutím velmi tenké vnitřní stěny tepny, tunica intima, a vzniku váčku krve na tepně. Simulace pulzací silně deformovatelné pružné trubice tedy může posloužit k přesnější představě deformace cév způsobené prouděním krve. [3]



Obr. 1: Průřez tepnou a její vrstvy [7]

Momentálně se různé typy pružných trubíc taktéž používají u napájecích systémů tepelných a vodních elektráren, vodovodních sítí, zavlažování, hydraulických mechanismů atd. [8]

Ve výpočetní části proto bude popsán postup při tvorbě 3D modelu, tvorbě geometrie a následně sítě, nastavení numerického výpočtu kapaliny a nastavení strukturální analýzy trubice. Také je stručně popsáno modelování v programu Maple.

Dále budou v jedné z kapitol uvedeny a okomentovány veškeré dosažené výsledky průtoků, tlaků, napětí, rychlostí atd. V závěru práce jsou pak tyto výsledky shrnuty.

2 TEORETICKÁ ČÁST

2.1 Hlavní rovnice popisující proudění kapaliny v trubici

Hlavní rovnice umožňující simulaci proudění kapaliny v trubici jsou pohybové rovnice, tj. Navier-Stokesova a Bernoulliho, a rovnice kontinuity. Proudění kapaliny v trubici lze také vyjádřit vztahy z elektrohydraulické analogie.

2.1.1 Rovnice kontinuity

Základním vyjádřením zákona zachování hmotnosti v diferenciálním tvaru neboli rovnici kontinuity pro stlačitelnou kapalinu je vztah [9]:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial x_i} \cdot v_i + \rho \cdot \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0 \quad (2.1)$$

kde: ρ hustota tekutiny [$kg \cdot m^{-3}$],
 t čas [s],
 x_i polohová souřadnice [m],
 v_i rychlost proudění tekutiny [$m \cdot s^{-1}$].

Tento vztah je však obecný, proto si pro nestacionární proudění v pružné trubici odvodíme jiný vztah, který bude vycházet z rovnice [8; 10]:

$$\frac{dm}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{\Delta V} \rho dV = \frac{d}{dt} (\rho \cdot \Delta V) = \Delta V \cdot \frac{d\rho}{dt} + \rho \cdot \frac{d\Delta V}{dt} = 0 \quad (2.2)$$

kde: m hmotnost kapaliny [kg],
 ΔV kontrolní objem kapaliny v trubici [m^3],
 V objem kapaliny v trubici [m^3].

Následným upravením, které je uvedeno v [8; 10] dostaneme tvar:

$$\frac{1}{v_0^2} \cdot \frac{dp}{dt} \cdot S + \rho \cdot \frac{\partial Q}{\partial x} + \rho \cdot \frac{\int_{\Gamma} v \cdot n dS}{dx} = 0 \quad (2.3)$$

kde: v_0 rychlost zvuku v kapalině [$m \cdot s^{-1}$],
 p tlak [Pa],
 S průtočná plocha trubice [m^2],
 Q objemový průtok kapaliny trubicí [$m^3 \cdot s^{-1}$],
 Γ plocha představující plášť trubice [m^2],
 n normálový jednotkový vektor [$-$].

Pomocí normálového napětí σ v trubici (1.1) a tenzoru rychlosti deformace trubice \dot{e}_{ij} (symetrické části tenzoru rychlosti v_{ij}) uvedeného v (2.4) lze s využitím Gauss-Ostrogradského věty určit člen $\int_{\Gamma} v \cdot n \, dS$ související s deformací trubice. [8; 10]

$$\dot{e}_{ij} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) = \frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{1}{E} \cdot \frac{d\sigma}{dt} = \frac{r_1}{E \cdot s} \cdot \frac{dp}{dt} \quad (2.4)$$

$$\int_{V_T} \sigma \cdot \dot{e}_{ij} \, dV = p \cdot \int_{\Gamma} v \cdot n \, dS \quad (2.5)$$

kde: ε poměrná deformace (přetvoření) [–],
 E modul pružnosti v tahu [Pa],
 V_T elementární objem trubice [m^3], $V_T = 2 \cdot \pi \cdot r_1 \cdot s \cdot dx$,
 π Ludolfovo číslo [–].

$$\int_{\Gamma} v \cdot n \, dS = S \cdot \frac{d_1}{E \cdot s} \cdot \frac{dp}{dt} \cdot dx \quad (2.6)$$

kde: d_1 vnitřní průměr trubice [m].

Dosazením tohoto vztahu do rovnice kontinuity (2.3) dostaneme [8; 10]:

$$\frac{dp}{dt} \cdot S \cdot \left(\frac{1}{v_0^2} + \frac{\rho \cdot d_1}{E \cdot s} \right) + \rho \cdot \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (2.7)$$

$$\delta = \frac{1}{v_0^2} + \frac{\rho \cdot d_1}{E \cdot s} = \frac{1}{\rho \cdot v_0^2} + \frac{d_1}{E \cdot s} = \frac{1}{E_K} + \frac{d_1}{E \cdot s} = \frac{1}{K_C} \quad (2.8)$$

kde: δ součinitel objemové stlačitelnosti [Pa^{-1}],
 E_K modul objemové pružnosti kapaliny [Pa],
 K_C modul objemové pružnosti [Pa].

Využitím substanciální derivace (2.9) a vztahu (2.10) bude mít rovnice kontinuity finální tvar (2.11). [8; 10; 11]

$$\frac{dp}{dt} = \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} \cdot v \quad (2.9)$$

$$Q = v \cdot S \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{S}{K_C} \cdot \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{1}{K_C} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} \cdot Q = 0 \quad (2.11)$$

2.1.2 Pohybové rovnice

Pohybové rovnice jsou sestaveny na základě dynamické silové rovnováhy na element kapaliny (makroskopickou částici), na který působí síly hmotnostní a plošné. Pro ideální kapalinu máme Eulerovu rovnici hydrodynamiky (ERHD), která vypadá následovně [9; 11]:

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \cdot v_j = a_{(f)i} - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x_i} \quad (2.12)$$

kde: $a_{(f)i}$ reprezentant hmotnostní síly $[N]$.

2.1.2.1 Bernoulliho rovnice

Zintegrováním ERHD po proudnici dostaneme Bernoulliho rovnici neboli zákon zachování energie mezi dvěma místy na proudnici. [9]

$$\frac{p_I}{\rho} + \frac{v_I^2}{2} + g \cdot H_I = \frac{p_{II}}{\rho} + \frac{v_{II}^2}{2} + g \cdot H_{II} + \int \frac{\partial v_i}{\partial t} dx_i \quad (2.13)$$

kde: p_I, p_{II} vstupní a výstupní tlak $[Pa]$,

v_I, v_{II} vstupní a výstupní rychlost $[m \cdot s^{-1}]$,

g tíhové zrychlení $[m \cdot s^{-2}]$,

H_I, H_{II} hloubka kapaliny $[m]$.

2.1.2.2 Navier-Stokesova rovnice

Je to pohybová rovnice pro viskózní obecně stlačitelnou kapalinu při laminárním proudění. Odvodit lze pomocí znalosti ERHD (2.12) a zavedení tenzoru plošných sil T_{ij} a tenzoru napětí σ_{ij} . Ze silové rovnováhy na element kapaliny lze odvodit rovnici [9]:

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \cdot v_j = a_{(f)i} - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial T_{ji}}{\partial x_j} \quad (2.14)$$

Z důvodu symetrie tenzoru plošných sil platí (2.15) a pro tenzor napětí lze napsat [9; 10]:

$$T_{ji} = T_{ij} \quad (2.15)$$

$$\sigma_{ij} = -T_{ij} = -\delta_{ij} \cdot p + \Pi_{ij} \quad (2.16)$$

$$\Pi_{ij} = \lambda_V \cdot \delta_{ij} \cdot \dot{\epsilon}_{kk} + 2 \cdot \mu_V \cdot \dot{\epsilon}_{ij} \quad (2.17)$$

kde: δ_{ij} Kroneckerovo delta $[-]$,

Π_{ij} tenzor nevratných napětí $[Pa]$,

λ_V objemová (druhá) viskozita $[Pa \cdot s]$,

$\dot{\epsilon}_{kk}$ stopa tenzoru rychlosti v_{ij} $[s^{-1}]$,

μ_V dynamická (první) viskozita $[Pa \cdot s]$.

Nyní můžeme do rovnice (2.14) dosadit a postupně ji podrobněji rozepsat. [9; 10]

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \cdot v_j = a_{(f)i} - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial \Pi_{ij}}{\partial x_j} \quad (2.18)$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \cdot v_j = a_{(f)i} - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\lambda_V}{\rho} \cdot \delta_{ij} \cdot \frac{\partial^2 v_k}{\partial x_k \partial x_j} + \frac{\mu_V}{\rho} \cdot \left(\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{\partial^2 v_j}{\partial x_i \partial x_j} \right) \quad (2.19)$$

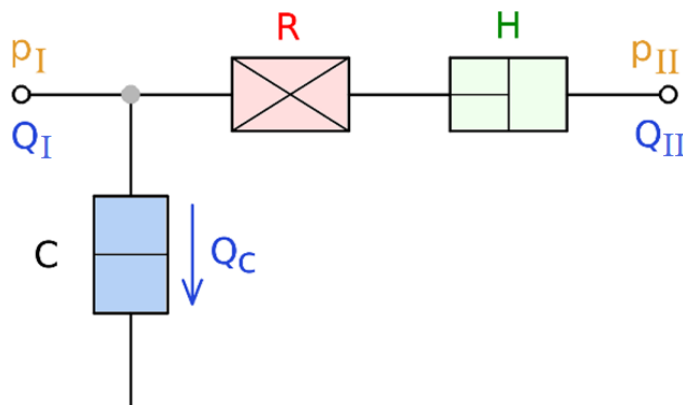
Za předpokladu platnosti rovnice (2.20), protože se jedná o nezhřídlovou, nestlačitelnou kapalinu, je uveden konečný tvar rovnice rovnováhy (Navier-Stokesovy) v (2.21). [9]

$$\frac{\partial^2 v_j}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_j} \right) = 0 \quad (2.20)$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \cdot v_j = a_{(f)i} - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\mu_V}{\rho} \cdot \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j} \quad (2.21)$$

2.1.3 Elektrohydraulická analogie

Jednou z možností popisu proudění v trubici je vytvoření jednorozměrného elektrohydraulického modelu trubice pomocí vztahů vycházejících z elektrohydraulické analogie. Mezi potřebné vztahy patří hydraulický odpor proti pohybu R , odpor proti zrychlení H a hydraulická kapacita C . Budeme předpokládat, že trubice má neměnný poloměr. Výhodou jsou spojitě rozložené parametry, nevýhodou nepřesné výsledky. Pro lepší znázornění je uvedeno schéma na (Obr. 2), ze kterého je možné díky Kirchhoffovým zákonům zjistit tlak a průtok. [12]



Obr. 2: Schéma elektrohydraulická analogie [12]

$$p_I - p_{II} = R \cdot Q_{II}^2 + H \cdot \frac{dQ_{II}}{dt} \quad (2.22)$$

$$Q_I = Q_{II} + Q_C = Q_{II} + C \cdot \frac{dp_I}{dt} \quad (2.23)$$

kde: Q_I, Q_{II} vstupní a výstupní objemový průtok [$m^3 \cdot s^{-1}$],
 Q_C stlačený objemový průtok [$m^3 \cdot s^{-1}$].

Vliv stlačitelnosti kapaliny a pružnost stěny trubice určuje korigovaný modul objemové pružnosti K_K . Definice H a R je uvedena v (2.25) a (2.26). [12]

$$C = \frac{V}{K_K} \quad (2.24)$$

$$H = \frac{m}{S^2} \quad (2.25)$$

$$R = \rho \cdot \xi \cdot \frac{l}{d_1} \cdot \frac{1}{2 \cdot S^2} \quad (2.26)$$

kde: ξ součinitel délkových ztrát (koeficient tření) [–],
 l délka trubice [m].

2.2 Základní lineární a nelineární modely materiálů stěny trubice

S ohledem na simulaci proudění v poměrně tenké silně elastické trubici jsou rovněž zmapovány a popsány použité základní modely materiálů stěny trubice a jejich konstitutivní vztahy. Dělí se na lineární a nelineární modely z pohledu závislosti napětí na deformaci.

2.2.1 Lineární modely

2.2.1.1 Hookeovský

Aby bylo možné sledovat nelineární chování materiálu trubice, je nutné uvést a později použít i vztahy pro běžný lineární materiál. Lineárně pružné těleso má lineární závislost mezi napětími, deformacemi, zatížením a posuvy. Tělesu, které se po odstranění vnějšího silového zatížení vrací do původního tvaru, říkáme pružné neboli elastické. Elasticitu (též pružnost) lineárně pružného tělesa charakterizuje konstitutivní vztah mezi Youngovým modulem E a poměrnou deformací ε , tzv. Hookeův zákon (2.27), který říká, že materiál tělesa je lineárně pružný neboli Hookeovský. [12; 13; 14]

$$\sigma = E \cdot \varepsilon \quad (2.27)$$

Vycházející z tenzoru napětí σ_{ij} zapsaného v Einsteinově sumační symbolice [15; 16]:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \cdot \varepsilon_{ij} \quad (2.28)$$

kde: C_{ijkl} materiálový tenzor $[Pa]$,

ε_{ij} tenzor poměrné deformace $[-]$.

Hookeovský materiál je homogenní, má stejné složení a vlastnosti v celém objemu tělesa, a izotropní. Pokud je materiál izotropní, tzn. že jeho fyzikální vlastnosti nezávisí na směru měření, pak jeho mechanické vlastnosti lze popsat pouze dvěma nezávislými materiálovými konstantami, tj. modulem pružnosti v tahu E a Poissonovým číslem μ . Takový materiál lze pak popsat zobecněným Hookeovým zákonem (2.29). [2; 13; 14; 16; 17; 18]

$$\sigma_{ij} = \lambda_L \cdot \delta_{ij} \cdot \varepsilon_{kk} + 2 \cdot \mu_L \cdot \varepsilon_{ij} \quad (2.29)$$

kde: λ_L Laméův první (elastický) koeficient $[Pa]$,

ε_{kk} stopa tenzoru malých deformací $[-]$,

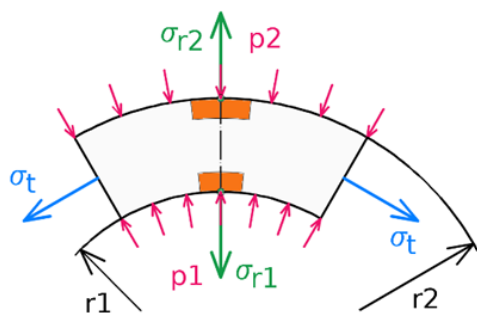
μ_L Laméův druhý (elastický) koeficient $[Pa]$.

$$\lambda_L = \frac{\mu \cdot E}{(1 + \mu) \cdot (1 - 2 \cdot \mu)} \quad (2.30)$$

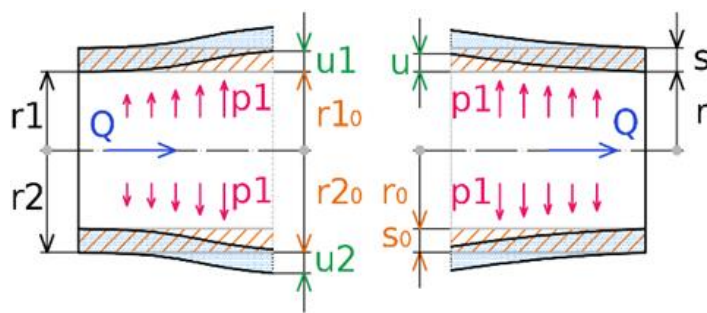
$$\mu_L = G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \mu)} \quad (2.31)$$

kde: G modul pružnosti ve smyku $[Pa]$.

Téměř všechna normálová napětí, kromě axiálních, spolu s rozměry v zatíženém a nezatíženém stavu jsou zobrazena na (Obr. 3) a (Obr. 4). [12]



Obr. 3: Napětí ve stěně trubice [12]



Obr. 4: Zatížení, rozměry a deformace trubice [12]

Axiální napětí na vnitřní a vnější stěně trubice (σ_{a1} a σ_{a2}) známe a pro radiální napětí platí následující [12]:

$$\sigma_{r1} = -p_1 \quad (2.32)$$

$$\sigma_{r2} = -p_2 = 0 \quad (2.33)$$

kde: $\sigma_{r1,2}$ vnitřní a vnější napětí v radiálním směru [Pa],

$p_{1,2}$ tlak působící na vnitřní a vnější stěnu trubice [Pa].

V našem případě by tlak p_2 měl být roven atmosférickému, je ale výhodnější uvažovat vnější tlak jako nulový a vnitřní p_1 jako relativní. Nulové je tedy i vnější radiální napětí σ_{r2} . [12]

Ke zjištění tečného neboli tangenciálního či obvodového napětí na vnitřním a vnějším povrchu (σ_{t1} a σ_{t2}) vyjdeme z rozšířeného Hookeova zákona pro prostorovou (trojosou) napjatost [12; 19]:

$$\varepsilon_{t1} = \frac{u_{r1}}{r_1} = \frac{1}{E} \cdot (\sigma_{t1} - \mu \cdot (\sigma_{r1} + \sigma_{a1})) \quad (2.34)$$

$$\varepsilon_{t2} = \frac{u_{r2}}{r_2} = \frac{1}{E} \cdot (\sigma_{t2} - \mu \cdot (\sigma_{r2} + \sigma_{a2})) \quad (2.35)$$

kde: $\varepsilon_{t1,2}$ vnitřní a vnější délková přetvoření v tečném směru [–],

$u_{r1,2}$ posuv v radiálním směru na vnitřní a vnější stěně [m],

r_2 vnější poloměr trubice [m].

Po vyjádření dostáváme:

$$\sigma_{t1} = \frac{u_{r1}}{r_1} \cdot E + \mu \cdot (\sigma_{r1} + \sigma_{a1}) \quad (2.36)$$

$$\sigma_{t2} = \frac{u_{r2}}{r_2} \cdot E + \mu \cdot (\sigma_{r2} + \sigma_{a2}) \quad (2.37)$$

2.2.2 Nelineární modely

Pružně plastické těleso má pouze v oblasti pružné deformace (oblast do mezního stavu pružnosti) lineární závislost, poté již ne. Pokud je zatěžováno, překročí tuto mez a dostane se tak do elasticko-plastické zóny, pak po následném odlehčení v tělese zůstanou trvalé deformace a nevrátí se tak do původního stavu. Nás bude zajímat pouze elastická deformace. [13; 14]

Měkké biologické tkáně jako tepna vykazují velké deformace a mají nelineární deformačně-napěťové závislosti. Jedná se o hyperelastické materiály, které lze lépe popsat pomocí hyperelastických modelů, mezi které patří neo-Hookeovský model, Mooney-Rivlin, Yeoh, Ogden a jiné. Tygon, sloužící jako náhrada tepny, je elastomer (pružný polymer), a tudíž lze jeho vlastnosti popsat taktéž hyperelastickými modely. Základem pro popis těchto různých hyperelastických modelů je zderivovaná funkce hustoty deformační energie W podle deformačního gradientu F představující napětí v materiálu σ . [18; 20]

$$\sigma = \frac{\partial W(F)}{\partial F} \quad (2.38)$$

Deformační gradient je veličina vystihující lokální důsledky (vlastnosti) pohybu tělesa. Reprezentuje geometrickou transformaci referenčního (počátečního) liniového diferenciálního elementu na zdeformovaný element průběžné konfigurace ($F: dX \rightarrow dx$). Deformační gradient je nesymetrickým tenzorem druhého řádu. [16; 17; 18]

$$F(X, t) = \frac{\partial x(X, t)}{\partial X} \quad (2.39)$$

$$F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} \quad (2.40)$$

Za zmínku stojí míry deformace uvedené v [15], popisující deformace na základě různých typů tenzorů deformace (Green – Langerův a další). Základní tenzor deformace ε_x má tvar:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (2.41)$$

Významnou vlastností symetrických tenzorů druhého řádu jsou jeho tři invarianty I_i . Níže jsou uvedeny invarianty pro izotropní materiál s velkými deformacemi. [15; 17; 18]

$$I_1 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 \quad (2.42)$$

$$I_2 = \lambda_1^2 \cdot \lambda_2^2 + \lambda_2^2 \cdot \lambda_3^2 + \lambda_3^2 \cdot \lambda_1^2 \quad (2.43)$$

$$I_3 = \lambda_1^2 \cdot \lambda_2^2 \cdot \lambda_3^2 = J^2 \quad (2.44)$$

kde: λ_i vlastní čísla tenzoru $[-]$,

J Jakobián transformace $[-]$.

Dále je definovaný první a druhý modifikovaný invariant. [17; 21]

$$\bar{I}_1 = J^{-2/3} \cdot I_1 \quad (2.45)$$

$$\bar{I}_2 = J^{-4/3} \cdot I_2 \quad (2.46)$$

2.2.2.1 Neo-Hookeovský

Nejjednodušším základním nelineárním hyperelastickým modelem založeným na invariantech je model navržený Ronaldem Rivlinem, který obsahuje pouze jeden parametr C_1 , nazývaný se neo-Hookeovský model. Tento model je ale příliš primitivní a je vhodný spíše pro malé deformace, protože při velkých deformacích nad 20 % popřípadě až 40 % selhává. [12; 17; 18; 22]

$$W = C_1 \cdot (\bar{I}_1 - 3) + D_1 \cdot (J - 1)^2 \quad (2.47)$$

$$W = \frac{\mu_L}{2} \cdot (\bar{I}_1 - 3) + \frac{1}{d} \cdot (J - 1)^2 \quad (2.48)$$

kde: C_1 materiálová konstanta [Pa], $\mu_L = 2 \cdot C_1$,
 D_1 materiálová konstanta [Pa], $D_1 = \frac{1}{d} = \frac{E_K}{2}$,
 d parametr nestlačitelnosti [Pa⁻¹].

Pokud se jedná o nestlačitelný materiál, tak Jakobián $J = 1$ a tudíž lze hustotu deformační energie zapsat následovně [17; 18]:

$$W = C_1 \cdot (I_1 - 3) \quad (2.49)$$

Normálová napětí σ_{ii} vypočítáme pomocí vztahů pro Cauchyho napětí z hlediska velkých deformací [18]:

$$\sigma_{11} - \sigma_{33} = \lambda_1 \cdot \frac{\partial W}{\partial \lambda_1} - \lambda_3 \cdot \frac{\partial W}{\partial \lambda_3} \quad (2.50)$$

$$\sigma_{22} - \sigma_{33} = \lambda_2 \cdot \frac{\partial W}{\partial \lambda_2} - \lambda_3 \cdot \frac{\partial W}{\partial \lambda_3} \quad (2.51)$$

Dosazením prvního invariantu do energie napjatosti dostaneme:

$$W = C_1 \cdot (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3) \quad (2.52)$$

Následným zderivováním energie napjatosti podle jednotlivých vlastních čísel a dosazením do napětí dostaneme [18]:

$$\sigma_{11} - \sigma_{33} = \lambda_1 \cdot (2 \cdot C_1 \cdot \lambda_1) - \lambda_3 \cdot (2 \cdot C_1 \cdot \lambda_3) \quad (2.53)$$

$$\sigma_{22} - \sigma_{33} = \lambda_2 \cdot (2 \cdot C_1 \cdot \lambda_2) - \lambda_3 \cdot (2 \cdot C_1 \cdot \lambda_3) \quad (2.54)$$

Konečný tvar pak vypadá [12; 18]:

$$\sigma_{11} = \sigma_{33} + 2 \cdot C_1 \cdot (\lambda_1^2 - \lambda_3^2) \quad (2.55)$$

$$\sigma_{22} = \sigma_{33} + 2 \cdot C_1 \cdot (\lambda_2^2 - \lambda_3^2) \quad (2.56)$$

Jednotlivá napětí σ_{ii} představují normálová napětí na vnitřní a vnější stěně trubice, radiální $\sigma_{r1,2} = \sigma_{11}$, tangenciální $\sigma_{t1,2} = \sigma_{22}$ a axiální $\sigma_{a1,2} = \sigma_{33}$. Obdobná závislost platí pro poměrná protažení [12]:

$$\lambda_{a1,2} = \lambda_3 = 1 \quad (2.57)$$

$$\lambda_{t1,2} = \lambda_2 = 1 + \varepsilon_{t1,2} = \frac{r_{1,2} + u_{r1,2}}{r_{1,2}} \quad (2.58)$$

$$\lambda_{r1,2} = \lambda_1 = \frac{1}{\lambda_{t1,2}} \quad (2.59)$$

kde: $\lambda_{a1,2}$ vnitřní a vnější poměrná protažení v axiálním směru [–],
 $\lambda_{t1,2}$ vnitřní a vnější poměrná protažení v tečném směru [–],
 $\lambda_{r1,2}$ vnitřní a vnější poměrná protažení v radiálním směru [–].

V případě že se jedná o nestlačitelný materiál je deformace v axiálním směru nulová a axiální poměrné protažení, jak již bylo uvedeno je rovno jedné. [12]

2.2.2.2 Mooney-Rivlin

Slouží pro materiály vykazující složitější chování a rozšiřuje neo-Hookeovský model polynomiálním rozvojem uvedeném ve vztahu (2.60), kde $C_{00} = 0$. Bylo použito dvouparametrického Mooney-Rivlinova modelu s parametry $C_1 = C_{10}$ a $C_2 = C_{01}$, který zavádí hustotu deformační energie neboli energii napjatosti W ve tvaru (2.61). [17; 18; 21; 22]

$$W = \sum_{i,j=0}^n C_{ij} \cdot (\bar{I}_1 - 3)^i \cdot (\bar{I}_2 - 3)^j + \sum_{k=1}^m D_k \cdot (J - 1)^{2 \cdot k} \quad (2.60)$$

kde: C_{ij} materiálová konstanta vztahující se k deformační odezvě [Pa],

D_k materiálová konstanta vztahující se k objemové odezvě [Pa].

$$W = C_{10} \cdot (\bar{I}_1 - 3) + C_{01} \cdot (\bar{I}_2 - 3) + D_1 \cdot (J - 1)^2 \quad (2.61)$$

Opět platí, že pokud se jedná o nestlačitelný materiál, tak Jakobián $J = 1$. [17; 18]

$$W = C_1 \cdot (I_1 - 3) + C_2 \cdot (I_2 - 3) \quad (2.62)$$

Zde je počáteční smykový modul (Laméův druhý koeficient) definován [22]:

$$\mu_L = 2 \cdot (C_1 + C_2) \quad (2.63)$$

I v případě Mooney-Rivlinova modelu spočítáme normálová napětí σ_{ii} pomocí vztahů (2.50) a (2.51). Dosazením invariantů do energie napjatosti dostaneme [18]:

$$W = C_1 \cdot (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3) + C_2 \cdot (\lambda_1^2 \cdot \lambda_2^2 + \lambda_2^2 \cdot \lambda_3^2 + \lambda_3^2 \cdot \lambda_1^2 - 3) \quad (2.64)$$

Vztahy pro napětí po dosazení derivací [18]:

$$\sigma_{11} - \sigma_{33} = 2 \cdot C_1 \cdot \lambda_1^2 + 2 \cdot C_2 \cdot \left(\frac{1}{\lambda_3^2} + \frac{1}{\lambda_2^2} \right) - 2 \cdot C_1 \cdot \lambda_3^2 + 2 \cdot C_2 \cdot \left(\frac{1}{\lambda_2^2} + \frac{1}{\lambda_1^2} \right) \quad (2.65)$$

$$\sigma_{22} - \sigma_{33} = 2 \cdot C_1 \cdot \lambda_2^2 + 2 \cdot C_2 \cdot \left(\frac{1}{\lambda_3^2} + \frac{1}{\lambda_1^2} \right) - 2 \cdot C_1 \cdot \lambda_3^2 + 2 \cdot C_2 \cdot \left(\frac{1}{\lambda_2^2} + \frac{1}{\lambda_1^2} \right) \quad (2.66)$$

Konečný tvar pak vypadá [12; 18]:

$$\sigma_{11} = \sigma_{33} + 2 \cdot C_1 \cdot (\lambda_1^2 - \lambda_3^2) - 2 \cdot C_1 \cdot \left(\frac{1}{\lambda_1^2} - \frac{1}{\lambda_3^2} \right) \quad (2.67)$$

$$\sigma_{22} = \sigma_{33} + 2 \cdot C_1 \cdot (\lambda_2^2 - \lambda_3^2) - 2 \cdot C_1 \cdot \left(\frac{1}{\lambda_2^2} - \frac{1}{\lambda_3^2} \right) \quad (2.68)$$

Ohledně radiálních, axiálních a tangenciálních napětí a protažení platí to samé jako v případě neo-Hookeovského modelu.

2.3 Popis a rozbor napětí v rotačně symetrických nádobách

Z (Obr. 3) a (Obr. 4) je zřejmé, že trubice je otevřené silnostěnné, popřípadě tenkostěnné rotační těleso, které je rotačně symetricky zatíženo tlakem na vnitřním i vnějším povrchu stěn. Je proto proveden popis a rozbor napětí v rotačně symetrických nádobách (tělesech), kterými lze zatíženou trubici nahradit. Jsou tedy i podrobně zpracovány pojmy jako tenkostěnné a silnostěnné těleso a je také okrajově zmíněna ovalita trubice. [12]

2.3.1 Rotačně symetrické nádoby

Rotačně symetrické těleso je to, které má rotačně symetrickou geometrii, uložení, materiálové vlastnosti a zatížení. Tudíž i napětí a deformace musí být symetrické. [19; 23]

Pro případ Hookeovského materiálu musíme zjistit, zda je naše trubice tenkostěnná nebo silnostěnná (tlustostěnná). V případě že se jedná o tenkostěnnou, s podstatně menší tloušťkou stěny než ostatní rozměry, lze totiž některé definiční vztahy významně zjednodušit. [12]

Tenkostěnná tělesa můžeme dále dělit podle napjatosti na ta, která jsou po tloušťce zatěžována konstantně (membránová neboli bezmomentová teorie skořepin) a ta, která jsou po tloušťce zatěžována proměnným napětím (momentová neboli ohybová teorie skořepin). Složitější momentová teorie zahrnuje i vliv ohybových momentů po krajích skořepin. [23; 24]

2.3.2 Hooke

2.3.2.1 Silnostěnné těleso

Nejprve uvedeme rozšířený Hookeův zákon pro prostorovou napjatost [12; 19]:

$$\sigma_r = \frac{E}{(1 + \mu) \cdot (1 - 2 \cdot \mu)} \cdot \left((1 - \mu) \cdot \varepsilon_r + \mu \cdot (\varepsilon_t + \varepsilon_a) \right) \quad (2.69)$$

$$\sigma_t = \frac{E}{(1 + \mu) \cdot (1 - 2 \cdot \mu)} \cdot \left((1 - \mu) \cdot \varepsilon_t + \mu \cdot (\varepsilon_r + \varepsilon_a) \right) \quad (2.70)$$

kde: σ_r radiální napětí [Pa],
 ε_r délková přetvoření v radiálním směru [–],
 ε_t délková přetvoření v obvodovém směru [–],
 ε_a délková přetvoření v axiálním směru [–],
 σ_t tangenciální napětí [Pa].

Posuv v axiálním směru u_a je nulový, protože trubici uvažujeme jako oboustranně vetknutou jejíž délka se nemění, a tudíž i přetvoření ε_a je nulové, ale axiální napětí σ_a je různé od nuly. [12]

Z rozšířeného Hookeova zákona můžeme postupem uvedeným v [19] získat vztahy pro radiální a tečné napětí na vnitřním a vnějším povrchu trubice.

$$\sigma_{t1} = K_m + \frac{C_m}{r_1^2} \quad (2.71)$$

$$\sigma_{t2} = K_m + \frac{C_m}{r_2^2} \quad (2.72)$$

$$\sigma_{r1} = K_m - \frac{C_m}{r_1^2} = -p_1 \quad (2.73)$$

$$\sigma_{r2} = K_m - \frac{C_m}{r_2^2} = -p_2 = 0 \quad (2.74)$$

kde: K_m konstanta [Pa],
 C_m konstanta [Pa · m²].

Protože víme, že radiální napětí na vnitřní a vnější straně trubice je dáno dle vztahů (2.73) a (2.74), určíme konstanty K_m a C_m [19; 23]:

$$K_m = \frac{p_1 \cdot r_1^2 - p_2 \cdot r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} = \frac{p_1 \cdot r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \quad (2.75)$$

$$C_m = (p_1 - p_2) \cdot \frac{r_1^2 \cdot r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} = p_1 \cdot \frac{r_1^2 \cdot r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \quad (2.76)$$

Dále můžeme stanovit deformace trubice (změny poloměrů) a axiální napětí opět s využitím rozšířeného Hookeova zákona [12; 19; 23]:

$$u_{r1} = \frac{r_1}{E} \cdot (\sigma_{t1} - \mu \cdot (\sigma_{r1} + \sigma_{a1})) \quad (2.77)$$

$$u_{r2} = \frac{r_2}{E} \cdot (\sigma_{t2} - \mu \cdot (\sigma_{r2} + \sigma_{a2})) \quad (2.78)$$

$$u_a = \frac{l}{E} \cdot (\sigma_a - \mu \cdot (\sigma_t + \sigma_r)) = 0 \quad (2.79)$$

Ze vztahu (2.79) je tedy možné odvodit axiální napětí σ_a [12; 19]:

$$\sigma_a = \sigma_{a1,2} = \mu \cdot (\sigma_{t1,2} + \sigma_{r1,2}) = \mu \cdot \left(K_m + \frac{C_m}{r_{1,2}^2} + K_m - \frac{C_m}{r_{1,2}^2} \right) = 2 \cdot \mu \cdot K_m \quad (2.80)$$

2.3.2.2 Tenkostěnné těleso

Pokud platí následující podmínka, lze trubici uvažovat jako tenkostěnné těleso [12]:

$$\frac{d_{10}^2 + d_{20}^2}{2 \cdot d_{10}^2} \leq 1,1 \quad (2.81)$$

kde: $d_{10,20}$ vnitřní a vnější průměr trubice v klidovém stavu [m].

S našimi hodnotami průměrů $d_{10} = 0,0127 \text{ m}$ a $d_{20} = 0,0159 \text{ m}$ docházíme k výsledku přibližně 1,2837 a podmínka proto není splněna. Nicméně i přesto výpočet s tenkostěnnou variantou provedeme a doposud uvedené vztahy se zjednoduší. [12]

Nejprve zjednodušíme konstanty K_m a C_m s uvažováním (2.82), (2.83) a (2.84). [19]

$$r_1 \approx r_2 \approx r \quad (2.82)$$

$$(r_1 + r_2) \approx 2 \cdot r \quad (2.83)$$

$$(r_2 - r_1) \approx s \quad (2.84)$$

$$K_m = \frac{p_1 \cdot r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} = \frac{p_1 \cdot r_1^2}{(r_2 - r_1) \cdot (r_2 + r_1)} \approx \frac{p_1 \cdot r}{2 \cdot s} \quad (2.85)$$

$$C_m = p_1 \cdot \frac{r_1^2 \cdot r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} = \frac{p_1 \cdot r^3}{2 \cdot s} \quad (2.86)$$

kde: r poloměr trubice [m].

Nyní tyto upravené vztahy dosadíme do rovnic průběhů napětí (2.71), (2.73) a (2.80) a dostaneme tyto výsledky [19]:

$$\sigma_t \approx \frac{p_1 \cdot r}{2 \cdot s} + \frac{p_1 \cdot r}{2 \cdot s} = \frac{p_1 \cdot r}{s} \quad (2.87)$$

$$\sigma_r \approx \frac{p_1 \cdot r}{2 \cdot s} - \frac{p_1 \cdot r}{2 \cdot s} = 0 \quad (2.88)$$

$$\sigma_a \approx 2 \cdot \mu \cdot \frac{p_1 \cdot r}{2 \cdot s} = \frac{\mu \cdot p_1 \cdot r}{s} \quad (2.89)$$

Tečné napětí v tenkostěnném případě odpovídá Laplaceovu zákonu stejně jako napětí stěn cév, uvedené v úvodní kapitole ve vztahu (1.1), a radiální napětí je tedy nulové.

2.3.3 Neo-Hooke

2.3.3.1 Silnostěnné těleso

Zde nejprve určíme posuvy v radiálním směru na vnitřní a vnější stěně $u_{r1,2}$. Následně vnitřní a vnější poměrná protažení dle vztahů (2.57) až (2.59). [12]

$$u_{r1,2} = r_{1,2} - r_{10,20} \quad (2.90)$$

Dále bude potřeba znát měnicí se poloměr vnější strany trubice r_2 , který vzhledem k nestlačitelnosti trubice odpovídá následujícímu tvaru [12]:

$$r_2 = \sqrt{r_1^2 + r_{20}^2 - r_{10}^2} \quad (2.91)$$

Předpokládá se, že objem se zachovává. Ze základních vztahů určíme jednotlivá přetvoření a nyní opět vyjádříme napětí. Radiální odpovídá tlakům na vnitřní a vnější stěně jako v případě (2.73) a (2.74). Axiální a tečné napětí vychází ze vztahů (2.55) a (2.56). [12]

$$\sigma_{a1,2} = \sigma_{r1,2} - 2 \cdot C_1 \cdot (\lambda_{r1,2}^2 - \lambda_{a1,2}^2) \quad (2.92)$$

$$\sigma_{t1,2} = \sigma_{a1,2} + 2 \cdot C_1 \cdot (\lambda_{t1,2}^2 - \lambda_{a1,2}^2) \quad (2.93)$$

2.3.4 Mooney-Rivlin

2.3.4.1 Silnostěnné těleso

Obdobně jako neo-Hookeovský model silnostěnného tělesa je spočítán Mooney-Rivlin. Jediný rozdíl je ve výpočtu axiálních a tečných napětí, která nyní vychází ze vztahů (2.67) a (2.68). [12]

$$\sigma_{a1,2} = \sigma_{r1,2} - 2 \cdot C_1 \cdot (\lambda_{r1,2}^2 - \lambda_{a1,2}^2) + 2 \cdot C_1 \cdot \left(\frac{1}{\lambda_{r1,2}^2} - \frac{1}{\lambda_{a1,2}^2} \right) \quad (2.94)$$

$$\sigma_{t1,2} = \sigma_{a1,2} + 2 \cdot C_1 \cdot (\lambda_{t1,2}^2 - \lambda_{a1,2}^2) - 2 \cdot C_1 \cdot \left(\frac{1}{\lambda_{t1,2}^2} - \frac{1}{\lambda_{a1,2}^2} \right) \quad (2.95)$$

2.3.5 Ovalita trubice

Ovalita neboli nekruhovitost průřezu má výrazný vliv na změnu stavu napětí a deformace v potrubí. Je dána vztahem (2.96). [24]

$$O_v = 200 \cdot \frac{\hat{d} - \check{d}}{\hat{d} + \check{d}} \quad (2.96)$$

kde: O_v ovalita [%],
 \hat{d} maximální průměr průřezu trubice [m],
 \check{d} minimální průměr průřezu trubice [m].

Je obtížné ji měřit experimentálně, týká se tedy spíše numerických metod. Předpokládá se, že průřezem je elipsa, kvůli které změnou křivosti (přechod elipsy na kruh) vznikají ohybové momenty, a tedy přídatná napětí. [24]

2.4 Rozdíly mezi 1D a 3D modelováním

Pro simulaci 1D případu byl vybrán software Maple. Geometrie trubice byla numericky popsána a definována. Je třeba poznamenat, že trubice byla v tomto případě modelována jako svislá. Mezi použité materiálové modely patřil v prvním případě běžný lineární Hookeovský, dále dva typy nelineárních hyperelastických modelů, neo-Hookeovský a Mooney-Rivlin. U Hookeovského modelu byli provedeny dvě varianty s uvažováním tenkostěnné a silnostěnné trubice. V případě nelineárních materiálů byli simulace vypočítány jen pro silnostěnné trubice, přičemž data byla vyhodnocována pouze z jednoho řezu v polovině délky trubice. Vzorce pro jednorozměrnou FSI analýzu provedenou v softwaru Maple a vyhodnocenou v programu Excel jsou uvedeny v kapitole 2.3 a také ve výzkumné zprávě [12]. Výsledky z těchto výpočtů poslouží ke srovnání s FSI analýzou pomocí programu ANSYS a s experimentálním měřením. Postup modelování je uveden v kapitole 3.2.

V programu ANSYS bylo provedeno 3D modelování vodorovné trubice, kdy na rozdíl od softwaru Maple byla vymodelována pouze její čtvrtina kvůli úspoře výpočetního času. Protože v programu Maple byla trubice svislá, musely se upravit okrajové a počáteční podmínky tak, aby odpovídaly vodorovné trubici ve Fluentu. Vzorce, se kterými tenhle software pracuje jsou popsány v kapitolách 2.1 a 2.2. Postup modelování trubice a kapaliny je uveden v kapitole 3.1.

2.5 Základní numerické metody

Tato část se bude věnovat popisu základních numerických metod použitých k řešení soustavy parciálních diferenciálních rovnic.

2.5.1 Metoda konečných objemů (MKO)

Je numerická metoda pro modelování kapaliny pomocí základních rovnic uvedených v kapitole 2.1 (kontinuity, Bernoulliho, Navier–Stokesovy aj.) popisujících spojitě prostředí. Tato metoda je jedna z nejstarších a užívá ji právě i software ANSYS. Řešená oblast je rozdělena na konečný počet malých kontrolních objemů pomocí sítě viz 2.6.3. Každý kontrolní objem má proměnné (tři složky rychlosti, tlak a turbulentní veličiny) v těžišti a hodnoty na hranicích se dopočítávají. V případě 3D geometrie je průtok přes hranice kontrolního objemu integrálním součtem přes všech šest ploch (east, west, north, south, top a bottom). Je zavedena difusní rovnice, na které je provedena diskretizace, platí zákon zachování a po několika úpravách dostaneme základní rovnici metody konečných objemů. [25; 26]

$$a_P \cdot \phi_P = \sum a_F \cdot \phi_F + z_u \quad (2.97)$$

$$\sum a_F \cdot \phi_F = a_E \cdot \phi_E + a_W \cdot \phi_W + a_N \cdot \phi_N + a_S \cdot \phi_S + a_T \cdot \phi_T + a_B \cdot \phi_B \quad (2.98)$$

kde: a_i koeficienty základní rovnice MKO [$W \cdot K^{-1}$],

ϕ_i skalární proměnná,

z_u konstantní část zdrojového členu (okrajové podmínky).

Následně je možné zvolit interpolační schémata [25; 26]:

- Protiproudá interpolace prvního řádu (First order upwind)
- Protiproudá interpolace druhého řádu (Second order upwind)
- Centrální difference (Central differencing)
- Protiproudá kvadratická interpolace (QUICK)

2.5.2 Metoda konečných prvků (MKP)

MKP je numerická metoda, která se využívá ke zjištění průběhů napětí, deformací, posuvů aj. pro dané těleso se známou geometrií, materiálem, zatížením a vazbami. MKP je časově náročnější než MKO a prodlužuje tak dobu výpočtu. Zde je touto metodou modelován časový průběh strukturální analýzy silně deformovatelné pružné trubice s protékající kapalinou. MKP prošla značným rozvojem a byla vytvořena řada programů postavených na bázi algoritmu této metody, mezi které patří právě i úspěšný systém ANSYS. Používá se v mechanice kontinua, elektřině a magnetismu, vedení tepla a smíšených úlohách. [14; 27; 28]

Základem metody je rozdělení, tzv. diskretizace, spojitěho reálného tělesa na prvky konečných rozměrů různých tvarů, např. ve 3D nejčastěji hexaedrické. Oproti tomu v klasické

analytické pružnosti a pevnosti je vše prováděno pomocí infinitezimálních, nekonečně malých, elementů. U diskretizace nesmí nikde dojít ke vzniku mezer nebo přesahů. Typické prvky u 1D těles (pruty, rámy) jsou přímkové, u 2D (stěny, skořepiny) trojúhelníkové a čtyřúhelníkové a u 3D čtyřstěnné, pětistěnné a šestistěnné prvky. [14; 27; 28]

Těleso je po diskretizaci rozděleno na prvky a uzly, které jsou očíslovány. Každý uzel má zapsanou svou polohu pomocí souřadnic, zatížení a v případě uložení nulové hodnoty posuvů. Každý element má zase každý zvlášť zapsané své materiálové charakteristiky, např. Youngův modul a Poissonovo číslo, lze tak počítat i s heterogenním materiálem. [14]

Máme několik přístupů, jak řešit napjatost a deformaci tělesa. Pokud úlohu řešíme analyticky, tak obvykle použijeme diferenciální nebo silový přístup. Pokud numericky, jako v případě MKP, tak převládá variační a deformační přístup a hovoříme o deformační variantě MKP. Východiskem pro tuto variantu je Lagrangeův variační princip, podle kterého je těleso v rovnováze, pokud je jeho celková potenciální energie minimální. V rovnici pro celkovou potenciální energii vystupuje hned několik neznámých. Těchto neznámých je v obecné prostorové statické úloze v každém uzlovém bodě sítě celkem 15. Tyto neznámé jsou navzájem svázány systémem obecných rovnic pružnosti (rovnice rovnováhy, geometrické rovnice a konstitutivní vztahy) a na hranicích musí být splněny předepsané nezbytné okrajové podmínky. [14; 27; 28]

Celkovou potenciální energii Π lze zapsat ve tvaru [14; 23; 27; 28]:

$$\Pi = W_E - P \quad (2.99)$$

kde: W_E energie napjatosti tělesa [J],
 P potenciální energie vnějšího zatížení [J].

Seznam neznámých parametrů [16; 27; 28]:

- vektor posuvů s třemi posuvy: u, v, w ,
- tenzor přetvoření s celkem šesti přetvořeními: $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$,
- tenzor napětí tvořen šesti napětími: $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$.

Pomocí variačního principu lze získat i základní rovnici rovnováhy MKP [14; 27; 28]:

$$M \cdot \ddot{U} + B \cdot \dot{U} + K \cdot U = F_V \quad (2.100)$$

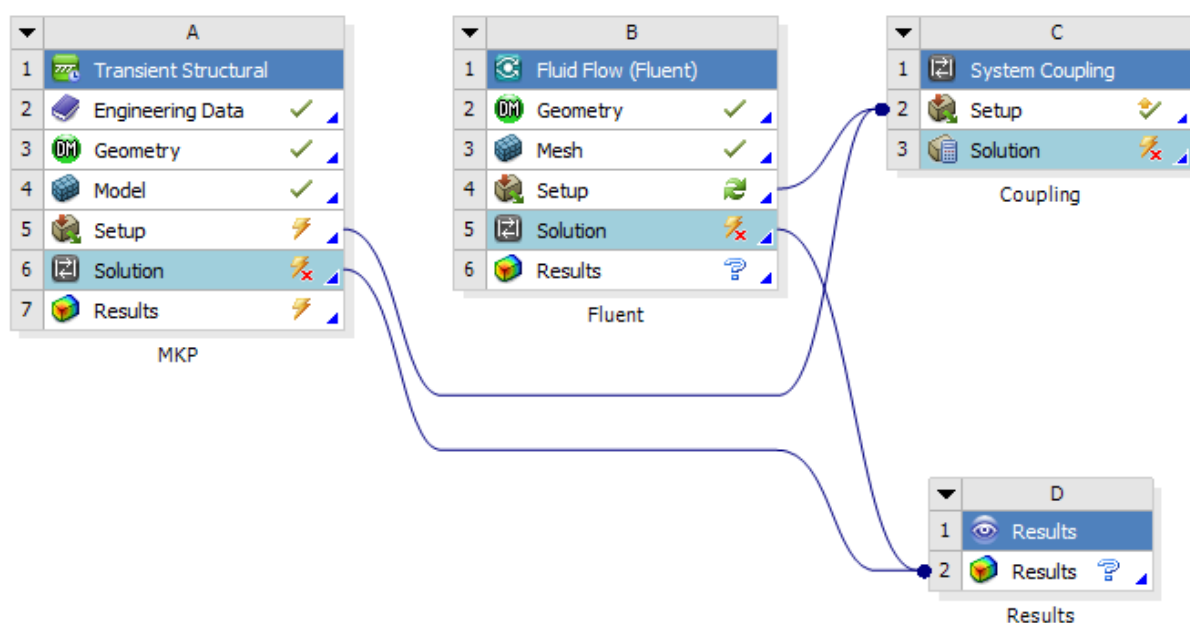
kde: M globální matice hmotnosti [kg],
 \ddot{U} nezávislý vektor zrychlení [$m \cdot s^{-2}$],
 B globální matice tlumení [$kg \cdot s^{-1}$],
 \dot{U} nezávislý vektor rychlostí [$m \cdot s^{-1}$],
 K globální matice tuhosti [$N \cdot m^{-1}$],
 U nezávislý vektor posuvů [m],
 F_V globální vektor vnějšího silového zatížení [N].

2.6 Simulační software ANSYS

Existuje několik simulačních softwarů, tzv. CAE zahrnujících strukturální analýzu (FEM) a proudění tekutin (CFD). Pro tento případ byl právě zvolen systém ANSYS a nadcházející kapitola bude věnována obecnému popisu a funkcím jeho jednotlivých částí, mezi které patří, Workbench, DesignModeler, Meshing, Fluent a Mechanical. [29]

2.6.1 Workbench

Pracovní prostředí Workbench slouží k propojení jednotlivých částí systému ANSYS a práci mezi nimi. Pro představu je zde uvedeno schéma, které bylo použito.



Obr. 5: Schéma výpočtu

Sekce Transient Structural slouží pro strukturální analýzu trubice metodou MKP. Engineering Data je místo, kde se nastavují parametry jednotlivých materiálů, jako je např. modul pružnosti v tahu neboli Youngův modul, nebo Poissonovo číslo. V sekci Fluid Flow je vymodelována a počítána kapalina. Tyto sekce jsou svázány a jejich společný výpočet probíhá pomocí režimu Coupling. Výsledky se pak ukládají v sekci Results.

2.6.2 DesignModeler

V obou hlavních sekcích je krok nazvaný Geometry, jak už název napovídá, je zde tvořena geometrie modelu pomocí programu DesignModeler, kde může být modelována jak kapalina, tak pevné těleso.

2.6.3 Mesh

V této části lze model rozdělit na menší elementy a vytvořit tak síť neboli mesh, která je jedním z nejdůležitějších kroků ovlivňujících přesnost výpočtu. Mesh se vytváří v programech Meshing (pro kapaliny) a Mechanical (pro pevná tělesa). Velký vliv na výpočet má hustota sítě, čím je hustší v dané oblasti zájmu, tím by měl být výpočet přesnější, ale doba simulace roste. Na dosažené výsledné hodnoty má vliv také tvar jednotlivých elementů sítě, které mohou být tetraedrické, hexaedrické, prizmatické a novodobé polyedrické. V této práci byly použity elementy hexaedrické. V případě svázané CFD a MKP úlohy je dobré vědět, že použitá síť může být nekonformní, polohy uzlových bodů společné části sítě se nemusí shodovat [30].

2.6.4 Fluent

Řešič, ve kterém budou probíhat CFD výpočty. Nastavuje se zde, zda bude výpočet statický (nezávislý na čase), nebo transientní (závislý na čase). Dále se zde volí modely turbulence v případě turbulentního proudění, proudící tekutina, okrajové podmínky, dynamická mesh, řády přesnosti, jaká data se budou ukládat atd. V našem případě je také důležité pro výpočet zvolit dynamickou neboli pohyblivou mesh.

2.6.5 Mechanical

Tato část slouží k MKP analýze, ale jak již bylo zmíněno, tak i kromě jiného ke tvorbě sítě pevných těles. Nastavují se zde různé typy vazeb a okrajových podmínek. Dále základní typy zatížení a samotný výpočet strukturální analýzy.

3 VÝPOČETNÍ ČÁST

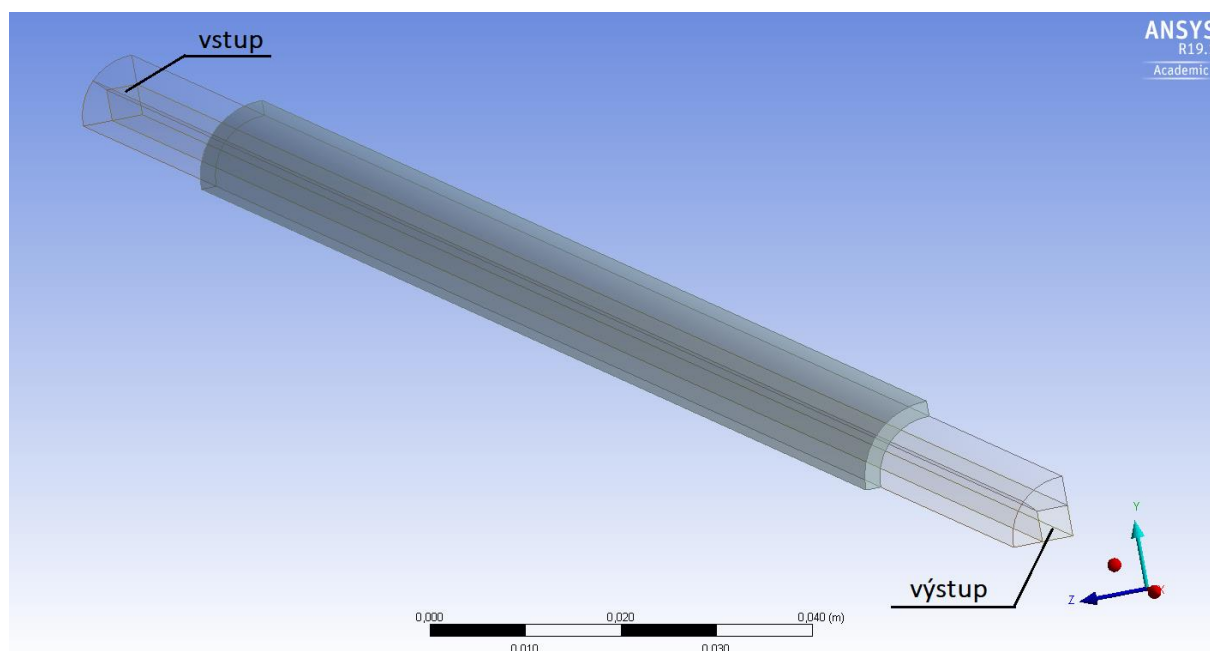
Pro zvolené okrajové podmínky je provedena simulace proudění v trubici s ohledem na velikost průtoku a tlaku. Dále s ohledem na velikost napětí a deformací trubice pro jednotlivé typy materiálových modelů. Využity jsou softwary ANSYS pro 3D a Maple pro 1D modely vycházející ze základních rovnic proudění.

3.1 Modelování v programu ANSYS

Následující kapitola se bude zabývat samotnou tvorbou modelu a postupem při vyhodnocování dat, pro který je využit systém ANSYS.

3.1.1 Geometrie trubice a kapaliny

Pro výpočet je vhodné vytvořit čtvrtinový model, tzn. že stačí vymodelovat pouze čtvrtku trubice a tekutiny. Obě geometrie byly vytvořeny odděleně. První část, trubice, byla vytvořena v sekci Transient Structural, druhá část, kapalina, v sekci Fluid Flow. Společně, pro lepší představu, je můžeme vidět na (Obr. 6). Délka celé domény je $0,7\text{ m}$ a je rozdělena na tři části. Na začátku a na konci jsou ustalovací délky kapaliny dlouhé $0,1\text{ m}$. Prostřední část s pružnou trubicí má délku $l = 0,5\text{ m}$. Hlavní částí geometrie je právě ta uprostřed, kde dochází k interakci kapaliny a pružné trubice. Trubice má v klidovém (nezatíženém) stavu vnitřní poloměr $r_{10} = 0,00635\text{ m}$, tloušťku $s_0 = 0,0016\text{ m}$ a vnější poloměr tedy bude mít velikost $r_{20} = 0,00795\text{ m}$. Ustalovací délky jsou kratší než doporučené z důvodu úspory výpočetních buněk.

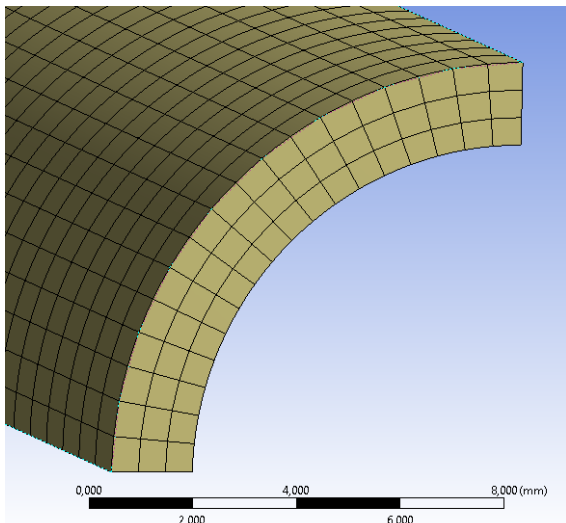


Obr. 6: Geometrie trubice a kapaliny

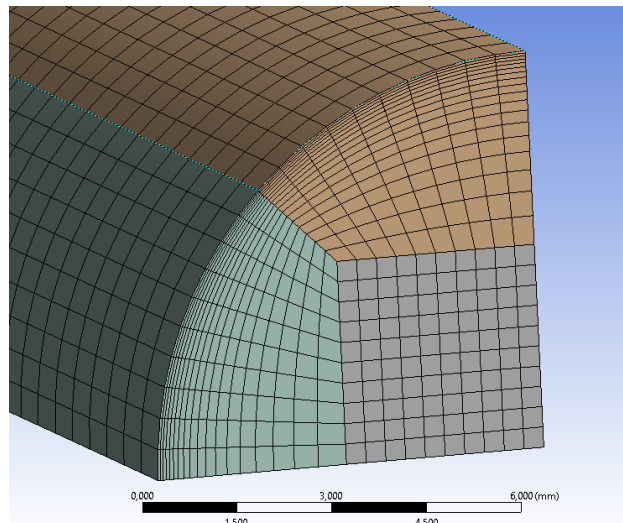
3.1.2 Mesh trubice a kapaliny

Pro zajištění konvergence numerického výpočtu je nutné, aby síť kapaliny v blízkosti stěny (v mezní vrstvě) pružné trubice byla co nejjemnější, zároveň jsme ale omezeni „studentskou“ licencí ANSYS Academic, kde maximální počet prvků sítě je 512 000 zároveň by vysoký počet elementů byl nevhodný z hlediska navýšení výpočetních časů. Maximální počet elementů pro trubici tedy strukturální část, opět daný licencí ANSYS Academic, je pak 32 000. Náš model měl ve fluidické části 160 527 a v strukturální 18 900 elementů. Pro srovnání výpočtů byl vymodelovaný i jednodušší případ obsahující pouze kapalinu, ale s jemnější sítí, který měl elementů 322 000. Do rozsahu studentské licence jsme se tedy bez problému vešli. [31]

Trubice je rozdělena funkcí edge sizing na tři vrstvy (Obr. 7) a u kapaliny bylo na hrany použito dělení s hladkým přechodem (smooth transition) pro postupné zhušťování vrstev elementů směrem k stěně trubice (Obr. 8). Detail jedné ze sítí kapaliny s plynulým přechodem můžete vidět v následujícím obrázku.



Obr. 7: Detail sítě modelu trubice



Obr. 8: Detail sítě modelu kapaliny

3.1.3 Nastavení numerického výpočtu kapaliny ve Fluentu

Protože víme, že výpočet bude závislý na čase, musíme ho na úplném začátku nastavit na transienční. Jako model turbulence je zvolený standartní dvourovnicový model k-epsilon, realizable. Pro proudění v blízkosti stěny byl nastaven přístup Enhanced Wall Treatment, pro který je vhodné mít $y^+ < 5$. Proudící tekutina je voda s parametry odpovídajícími teplotě 20 °C a to hustotou $\rho = 998,2 \text{ kg/m}^3$ a dynamickou viskozitou $\mu_v = 0,001003 \text{ Pa} \cdot \text{s}$.

Dále bylo nutné před spuštěním simulace proudění definovat okrajové podmínky. Zvolené okrajové podmínky obsahují sinusové rovnice a definují tlak na vstupu a výstupu trubice napodobující tlakové pulzace krve v tepně. Tato kombinace, pressure inlet a pressure outlet, zaručuje jednu z nejlepších konvergencí výpočtu ze všech kombinací okrajových

podmínek vstupu a výstupu. Jsou implementovány pomocí UDF kódu, který je napsaný v programovém jazyce C a je uveden v příloze A.

Tedy na vstupu a výstupu od spuštění výpočtu do času $t = 0,5$ s lineárně narůstá tlak dle funkcí:

$$f_{vstup\ 0,5} = 102\ 000 \cdot t \quad (3.1)$$

$$f_{výstup\ 0,5} = 104\ 200 \cdot t \quad (3.2)$$

Po uběhnutí daného času se okrajové podmínky změní na:

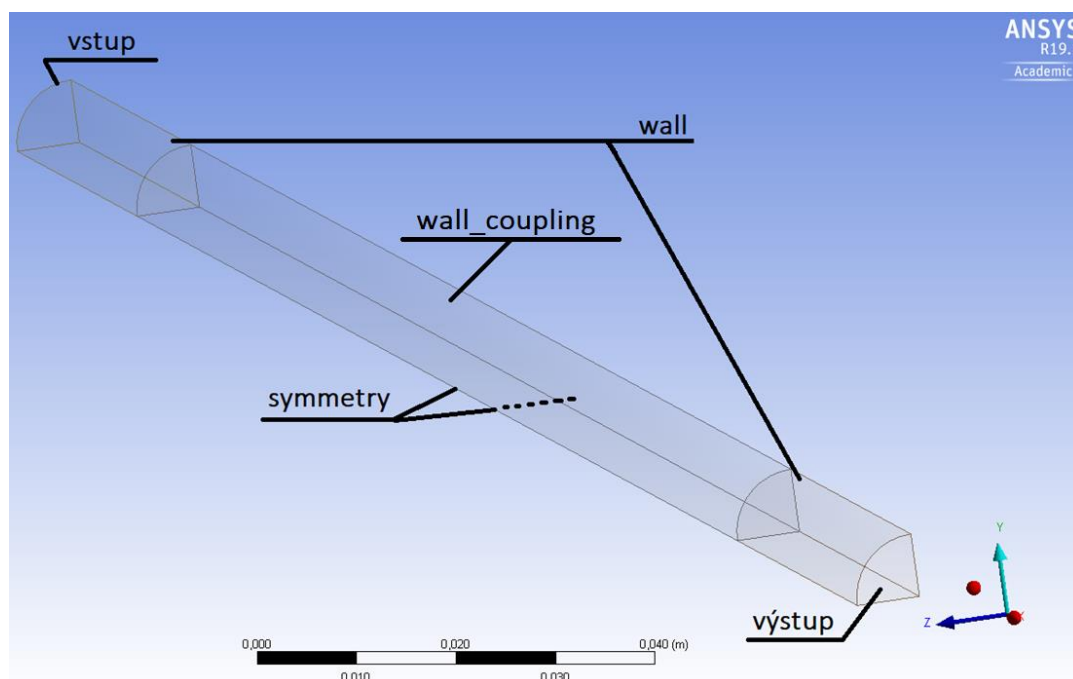
$$f_{vstup} = 151\ 000 + 32\ 913,5195 \cdot \sin(1,2875 \cdot 3,1415 \cdot 2 \cdot t + 2,24) - 100\ 000 \quad (3.3)$$

$$f_{výstup} = 157\ 100 + 33\ 500 \cdot \sin(1,2875 \cdot 3,1415 \cdot 2 \cdot t + 2,24) - 100\ 000 \quad (3.4)$$

Hodnota 1,2875 představuje frekvenci f tlakových pulzací. Perioda T by tedy měla být:

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{1,2875} \approx 0,7767\ s \quad (3.5)$$

Zaoblené stěny obklopující ustalovací části kapaliny včetně hraniční plochy kapaliny s trubicí byly nastaveny jako wall, stacionární, bez prokluzu s podmínkou ulpívání. Na stěnách symetrie čtvrtinového modelu jsou použity okrajové podmínky symmetry.



Obr. 9: Okrajové podmínky kapaliny

Kvůli pulzaci kapaliny a trubice bylo třeba zvolit pohyblivou neboli dynamickou síť. Prostřední stěna kapaliny hraničící s trubicí, označena jako wall_coupling, byla nastavena jako coupling. Zbývající části modelu tekutiny jako deforming s různými nastaveními síťování.

Protože výpočet bude probíhat transientně a bude svázaný se strukturální analýzou bylo nutné jako metodu řešení zvolit coupled s druhými řády přesnosti. V případě tuhé trubice, jednoduššího řešení pro srovnání, byla zvolena metoda simple, také s druhými řády.

Poté proběhlo nastavení ukládání jednotlivých dat průtoku a statického tlaku z pěti částí kapaliny, vstupu, čtvrtiny, poloviny, tři čtvrtiny a výstupu v časových intervalech 0,005 s. Také bylo důležité nastavit autosave se stejným časovým krokem pro ukládání měnicích se souborů (konkrétně *.cas* a *.dat*) s časem, z kterých byli později uloženy rychlostní profily.

Velikost časového kroku výpočtu je tedy nastaven na 0,005 s, počet kroků je 700, výpočet bude tedy simulovat průběh trvající 3,5 s. V každém kroku proběhne 8 iterací.

3.1.4 Nastavení strukturální analýzy trubice

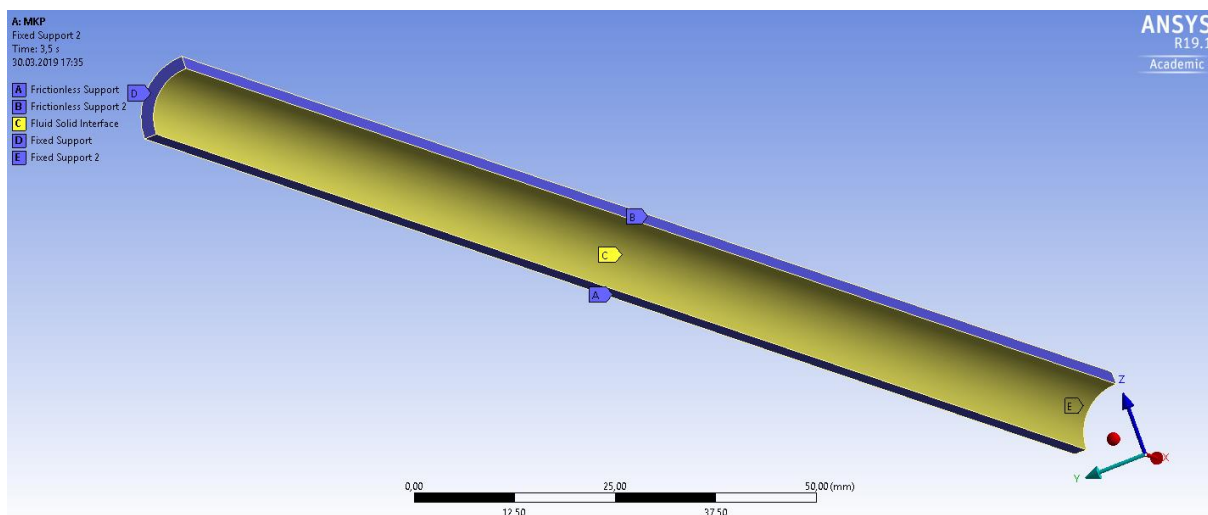
Typy materiálových modelů trubice byly tři, nelineární neo-Hookeovský, lineární Hookeovský a nelineární Mooney-Rivlin, a proto proběhly tři výpočty. Ve výpočtech nás nejvíce zajímala velikost napětí a deformací trubice pro jednotlivé typy materiálů.

Materiálové vlastnosti jednotlivých modelů, uvedené v sekci Engineering Data, jsou zapsány v následující tabulce:

Tab. 1: Materiálové vlastnosti jednotlivých modelů

neo-Hookeovský model	
Počáteční smykový modul	$\mu_L = 1,3 \cdot 10^6 \text{ Pa}$
Hookeovský model	
Youngův modul	$E = 4 \cdot 10^6 \text{ Pa}$
Materiálová konstanta	$C_2 = 0,65 \cdot 10^6 \text{ Pa}$
Poissonovo číslo	$\mu = 0,4999$
Mooney-Rivlin	
Materiálová konstanta	$C_{10} = 0,6 \cdot 10^6 \text{ Pa}$
Materiálová konstanta	$C_{01} = 0,05 \cdot 10^6 \text{ Pa}$

Okrajové podmínky a vazby trubice byly zvoleny následovně. Stěny v řezu symetrie byly označeny jako frictionless support, v překladu, podpora bez tření. Na čelech byly nastaveny vazby vetknutí neboli fixed support omezující posuv a natočení ve všech směrech. Na stěně, která se dotýká s kapalinou, byla dána okrajová podmínka rozhraní kapaliny a pevné látky, tedy fluid solid interface.



Obr. 10: Okrajové podmínky a vazby trubice

Bylo nastaveno, aby se měřilo a do grafů vykreslovalo normálové napětí (normal stress) ve směru osy x a směrové deformace (directional deformation) ve směru os x, y a z.

Následně byla pomocí Couplingu svázána strukturální a fluidická část a byla provedena simulace proudění v trubici s ohledem na velikost průtoku, statického tlaku, napětí a deformací trubice pro jednotlivé typy materiálových modelů.

3.2 Modelování v programu Maple

V programu Maple bylo napsáno celkem osm kódů dle rovnic uvedených v [12]. Čtyři s okrajovými podmínkami, které byly dány na vstupu i výstupu tlakem a čtyři s okrajovými podmínkami, které byly dány na vstupu průtokem a na výstupu tlakem. Obě tyto čtveřice zahrnovaly Hookeovský model materiálu s tenkostěnnou trubicí, Hookeovský model se silnostěnnou trubicí, neo-Hookeovský model se silnostěnnou trubicí a model Mooney-Rivlin se silnostěnnou trubicí. Pro větší přehlednost je vše uvedeno v následující tabulce.

Tab. 2: Přehled všech osmi variant kódů napsaných v programu Maple

Okrajové podmínky	Materiálový model	Typ trubice
tlak – tlak	Hookeovský	tenkostěnná
	Hookeovský	silnostěnná
	neo-Hookeovský	silnostěnná
	Mooney-Rivlin	silnostěnná
průtok – tlak	Hookeovský	tenkostěnná
	Hookeovský	silnostěnná
	neo-Hookeovský	silnostěnná
	Mooney-Rivlin	silnostěnná

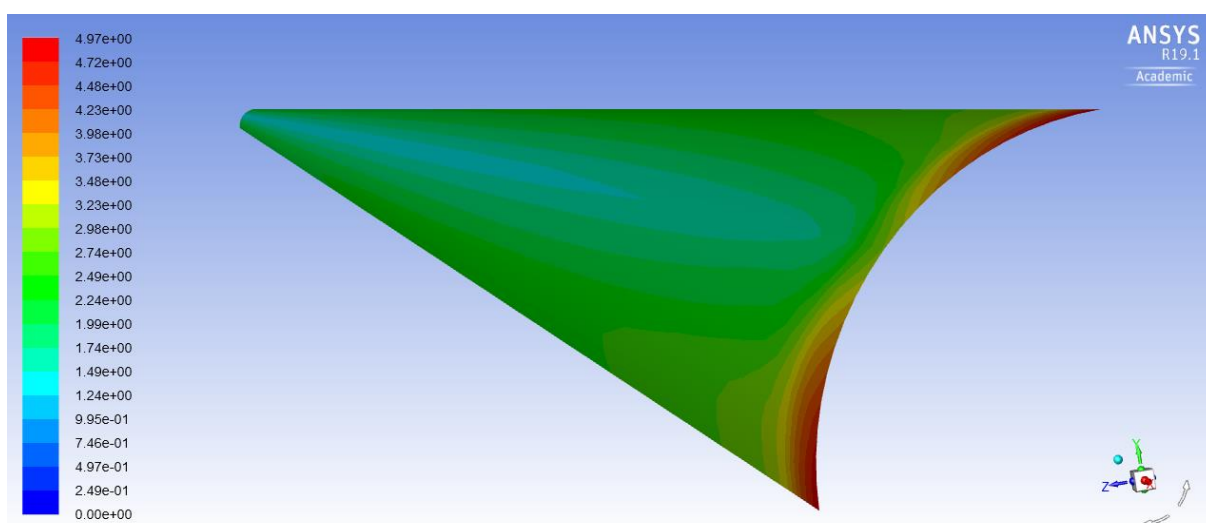
Použité kódy je možné nalézt v příloze B.

4 VÝSLEDKY POZOROVÁNÍ A DISKUZE

V následující kapitole jsou popsány veškeré dosažené výsledky a z hlediska vnějšího průměru d_2 je uskutečněno srovnání s experimentem. Výsledky, jak z Fluentu a pevnostní analýzy, tak i z programu Maple, byly zpracovány v programu Excel.

4.1 Kvalita výpočetní sítě

Hledisko kvality sítě v blízkosti obtékané stěny y^+ se na rozhraní kapaliny a trubice pohybuje v rozmezí hodnot 0 až 4,974 je tedy splněna podmínka pro přístup Enhanced Wall Treatment uvedená výše v kapitole 3.1.3.



Obr. 11: Kontura hlediska y^+ na vnitřní stěně trubice

4.2 Objemové průtoky v trubici

Protože CFD simulace realizovaná v řešiči Fluent vypočítá hmotnostní průtok Q_m , musí být pomocí hustoty přepočítán na objemový.

$$Q = \frac{Q_m}{\rho} \quad (3.6)$$

Nyní je možné zjistit Reynoldsovo číslo Re proudící kapaliny uvnitř trubice.

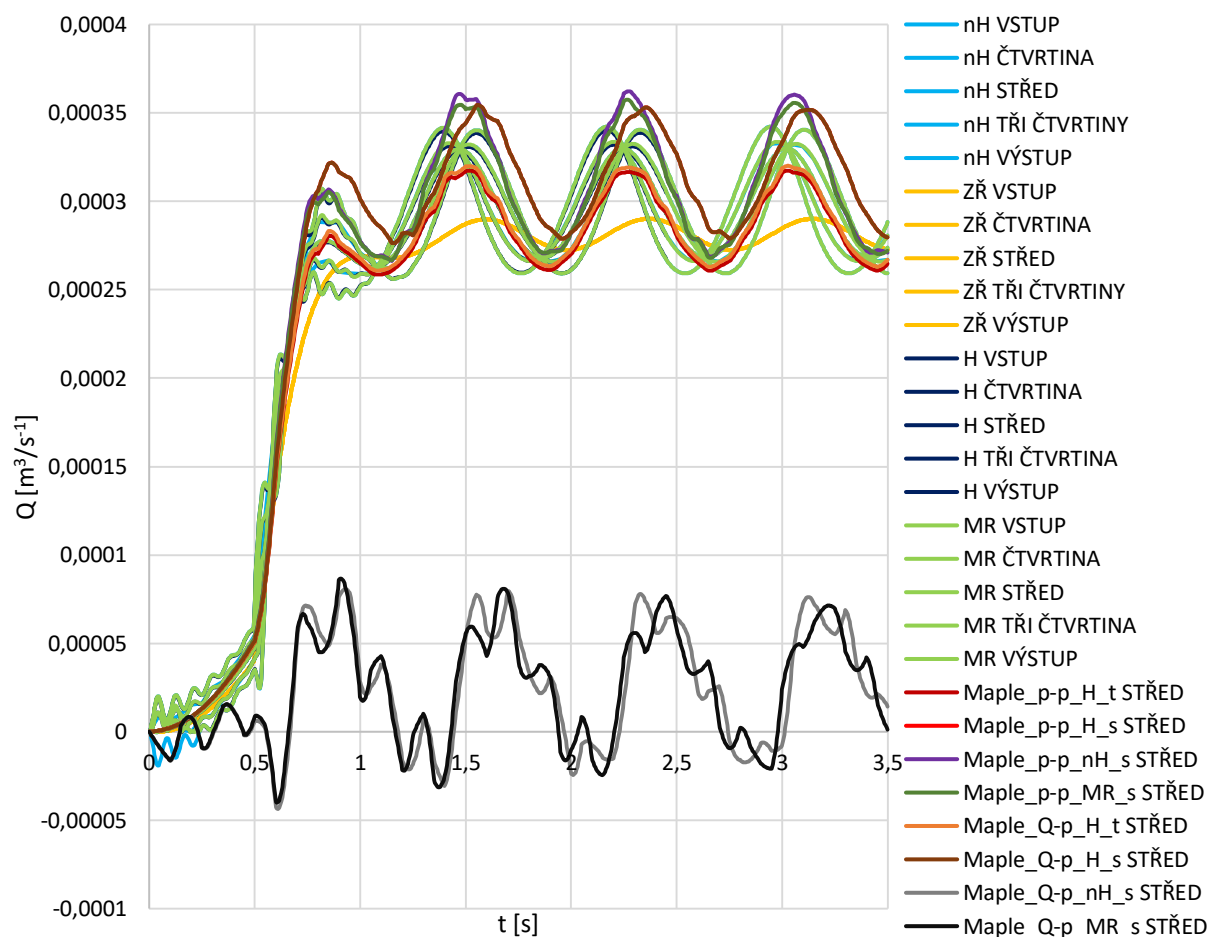
$$Re = \frac{|v_s| \cdot d_1}{\nu} = \frac{\left| \frac{Q}{S} \right| \cdot d_1}{\frac{\mu_V}{\rho}} \quad (3.7)$$

kde: v_s střední hodnota rychlosti kapaliny v trubici [$m \cdot s^{-1}$],

ν kinematická viskozita [$m^2 \cdot s^{-1}$].

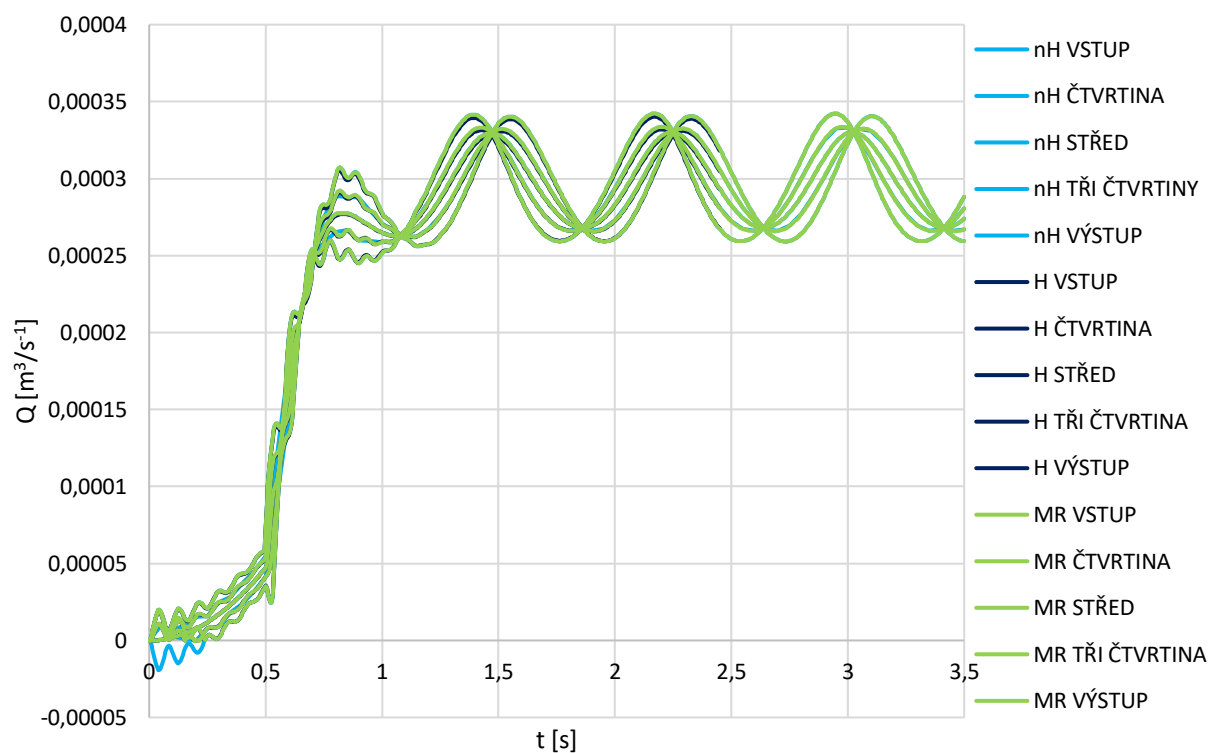
Reynoldsovo číslo vychází ve všech případech větší než cca 25 000 tudíž se jedná o turbulentní proudění.

Nyní je již možné uvést výsledky objemových průtoků v jednotlivých částech trubice s jednotlivými materiálovými modely, neo-Hooke (nH), Hooke (H) a Mooney-Rivlin (MR). Varianta pro srovnání výpočtů, s jednoduchým modelem obsahujícím pouze kapalinu má zkratku ZŘ (zjednodušené řešení). Označení p-p u výsledků z programu Maple znamená, že na vstupu i výstupu byly použity okrajové podmínky tlaku. Q-p značí okrajové podmínky průtoku na vstupu a tlaku na výstupu. Označení t a s pak představují tenkostěnnou a silnostěnnou trubici.

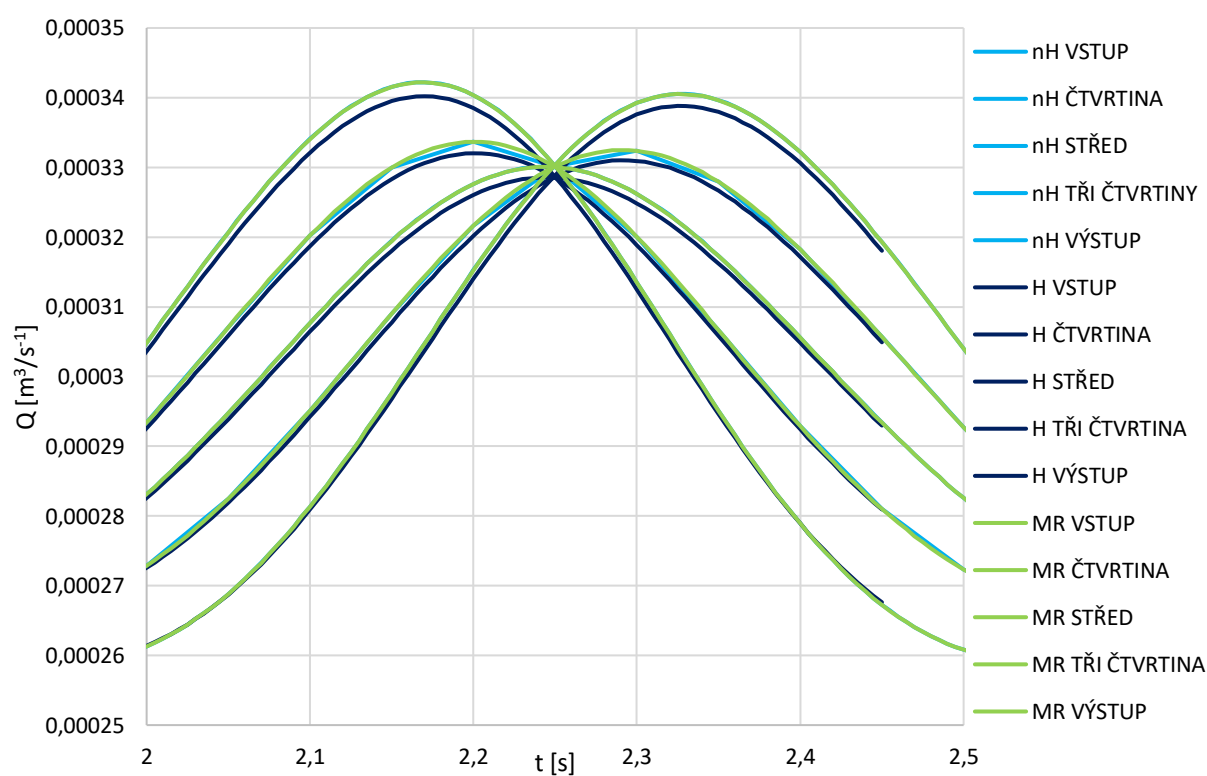


Obr. 12: Přehled všech variant naměřených objemových průtoků v závislosti na čase

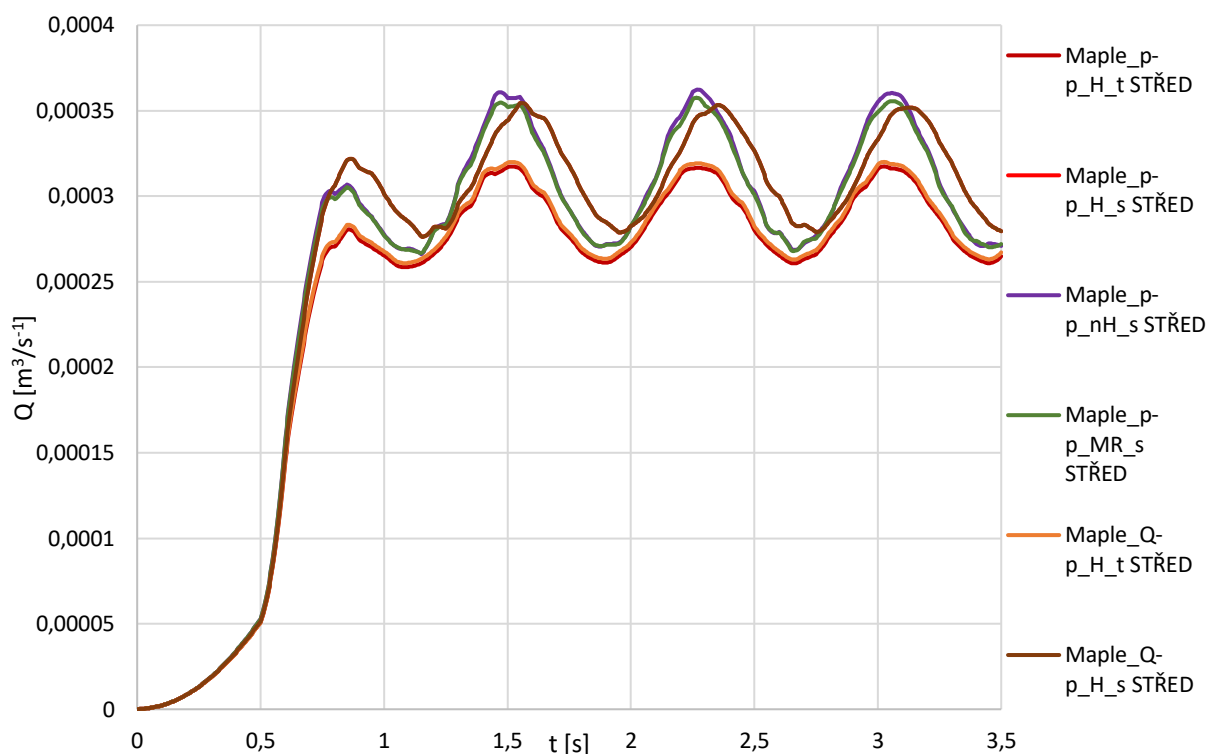
Černé a šedé křivky odpovídají jiným okrajovým podmínkám a vypočítané hodnoty jsou tedy jiné než ostatní. Žlutě zobrazené zjednodušené řešení má samozřejmě také odlišný tvar pulzací, protože model vůbec neobsahuje pružnou trubici a ta je nahrazena pouze okrajovou podmínkou wall (tuhou trubici). Neo-Hookeovský model označený světle modrou barvou je zastíněn a splývá s Hookeovským modelem a Mooney-Rivlinem a dosahují tedy víceméně stejných výsledků. Dále jsou tyto tři modely uvedeny zvlášť a z detailu v (Obr. 14) je možné vidět, že model Mooney-Rivlin má o něco větší amplitudu. Také si lze povšimnout, že výpočet Hookeovského modelu byl kvůli náhlému ukončení simulace v čase $t = 2,45$ s přerušen a z časových důvodů nebyla simulace opětovně realizována.



Obr. 13: Objemové průtoky v závislosti na čase z modelů nH , H a MR



Obr. 14: Detail objemových průtoků v závislosti na čase z modelů nH , H a MR



Obr. 15: Objemové průtoky v závislosti na čase z výsledků programu Maple

V (Obr. 15) jsou zvlášť uvedeny výsledky z programu Maple. Tenkostěnné případy Hookeovského modelu (tmavě červená a oranžová) dosahují přibližně stejných výsledků. U silnostěnných případů Hookeovského modelu (světle červená a hnědá) může být pozorováno, že získaná data vykazují velmi malé odchylky. U zbývajících dvou, neo-Hooke a Mooney-Rivlin, bylo taktéž dosaženo velice podobných výsledků.

Celkově lze usoudit, že nejspokojivějších výsledků bylo dosaženo z programu ANSYS, konkrétně u materiálových modelů Hooke, neo-Hooke a Mooney-Rivlin.

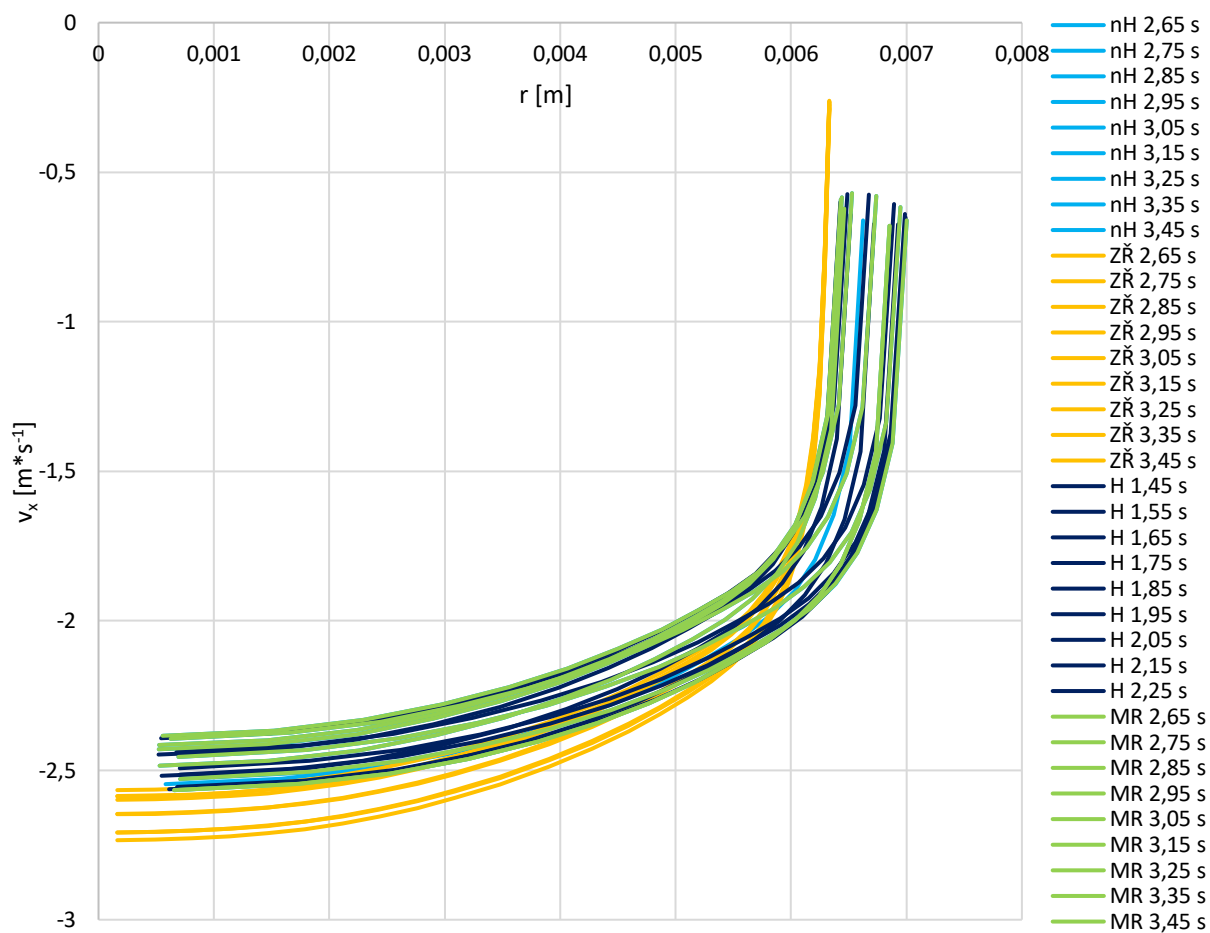
4.3 Rozbor proudění v trubici

Z výsledků ANSYS simulací je možné stanovit rychlosti kapaliny ve směru jednotlivých os x , y a z . V ose x je samozřejmě rychlost nejvyšší a rychlostní profil má podobu turbulentního proudění kapaliny. Ve zbylých osách y a z jsou rychlosti tekutiny téměř nulové.

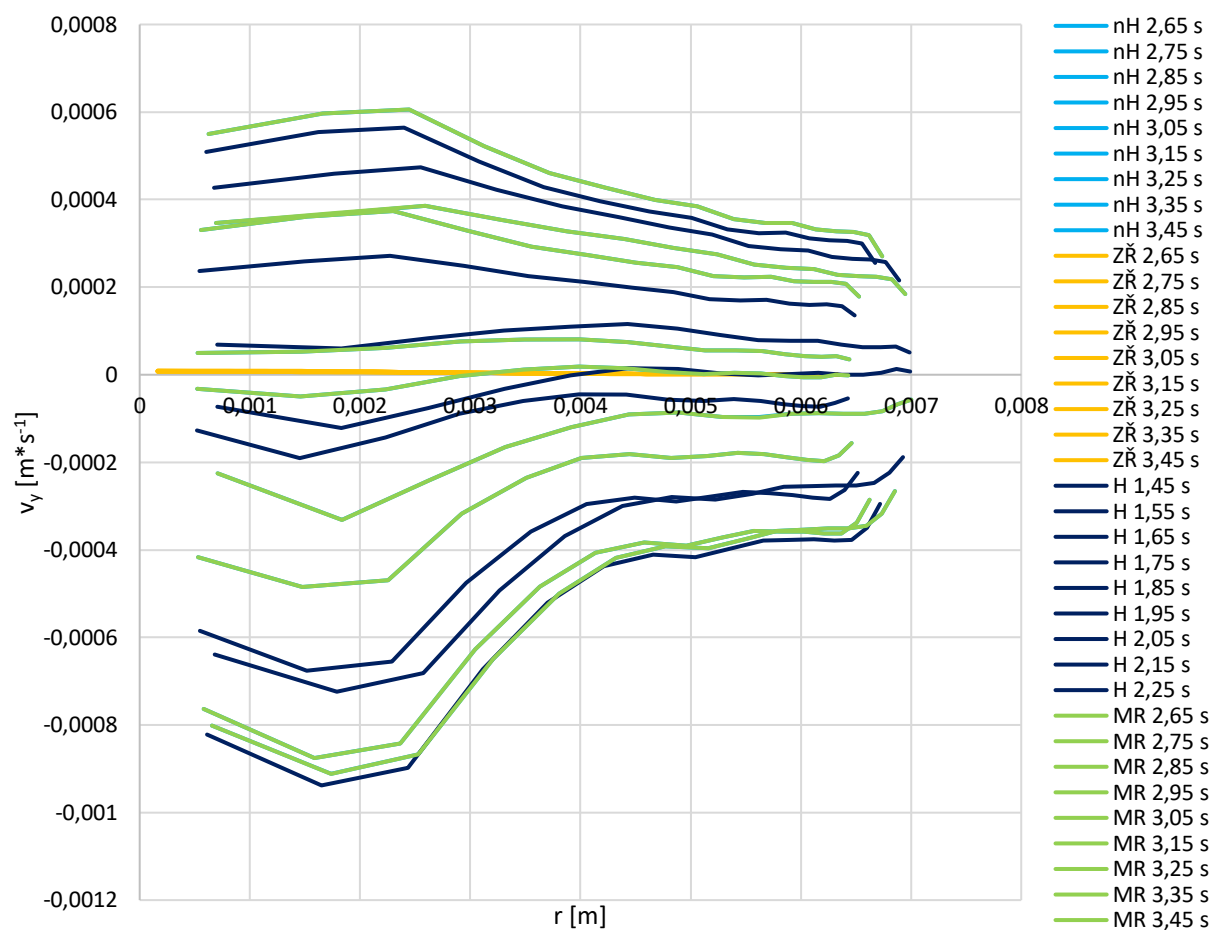
Z (Obr. 16) až (Obr. 18) je patrné, že rychlostní profily modelů neo-Hooke, Hooke a Mooney-Rivlin v jedné čtvrtině trubice si jsou navzájem velmi podobné. Naměřené rychlosti neo-Hooke a Mooney-Rivlina splývají úplně a světle modře znázorněný neo-Hooke tudíž nelze vidět. V případě zjednodušeného řešení se poloměr samozřejmě vůbec nemění.

Zvolené časové úseky 2,65 s až 3,45 s a 1,45 s až 2,25 s odpovídají jedné periodě a profily rychlostí v ní pulzují tam a zpět. U Hookeovského modelu byla zvolena jiná perioda právě z důvodu přerušeného výpočtu.

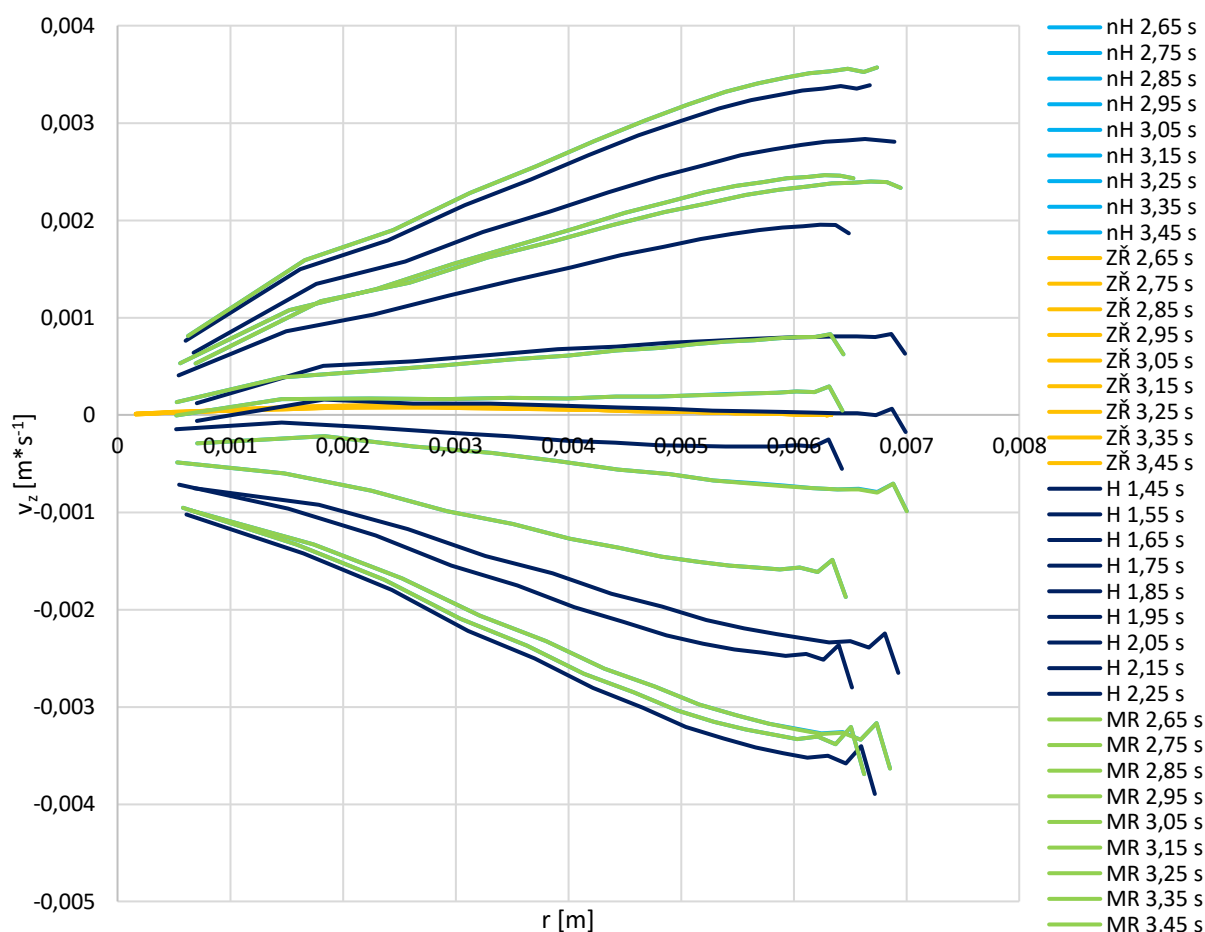
Rychlostní profily v polovině a třech čtvrtinách trubice jsou velmi podobné těm v jedné čtvrtině trubice, a proto jsou uvedeny v příloze C.



Obr. 16: Rychlostní profily v 1/4 trubice v ose x v závislosti na poloměru



Obr. 17: Rychlostní profily v 1/4 trubice v ose y v závislosti na poloměru



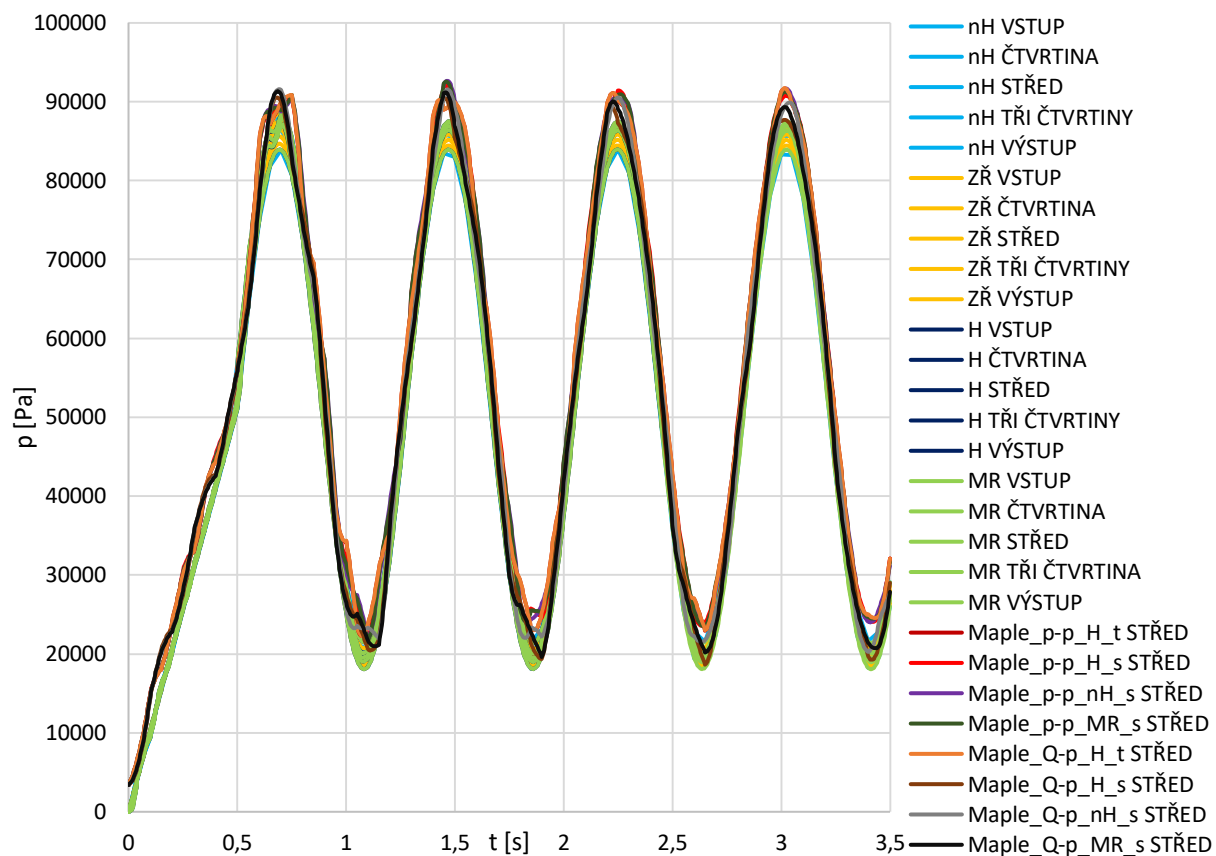
Obr. 18: Rychlostní profily v 1/4 trubice v ose z v závislosti na poloměru

4.4 Statické tlaky v trubici

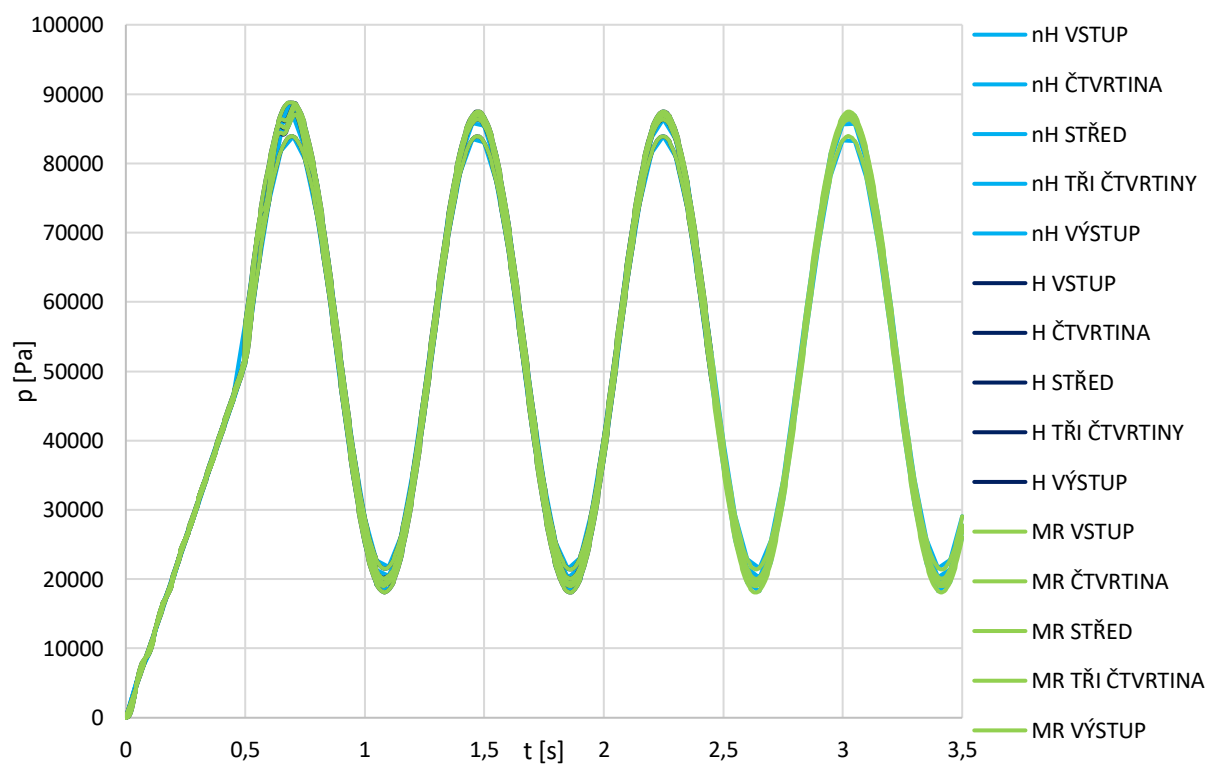
Kromě průtoků byly v trubici monitorovány statické tlaky, ty jsou zobrazeny níže na (Obr. 19). Lze si povšimnout, že výsledky z programu Maple dosahují větších hodnot tlaku a mají největší amplitudy. Pro lepší přehlednost uvedená data rozdělíme dle použitých softwarů do (Obr. 20) a (Obr. 21).

Výsledné tlaky z materiálových modelů neo-Hooke, Hooke a Mooney-Rivlin jsou totožné a navzájem se překrývají. Velice podobné výsledky dosahuje také zjednodušené řešení.

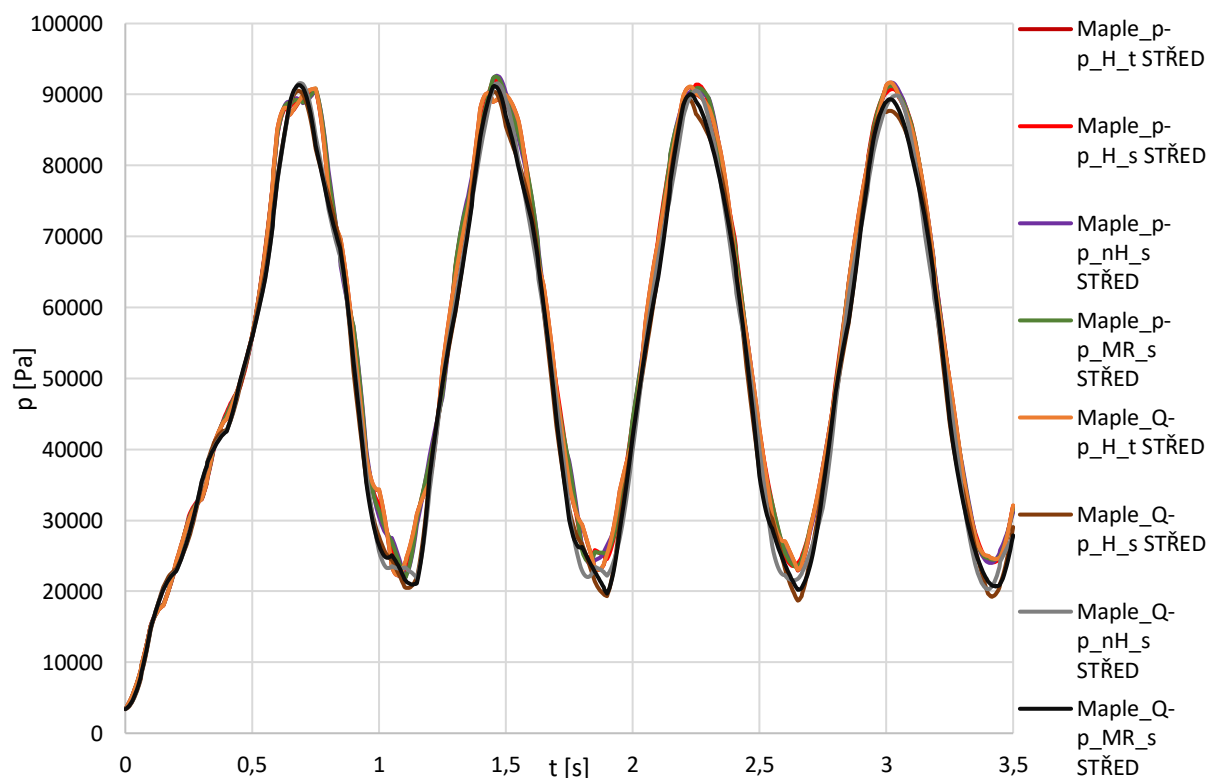
Co se týče výsledků ze softwaru Maple, tak největších amplitud dosahují silnostěnné varianty s okrajovými podmínkami průtok na vstupu, tlak na výstupu (hnědá, šedá a černá křivka). Zde jiné okrajové podmínky v případě černě a šedě vyznačenou křivkou zásadně nezměnily průběh tlaků, jako v případě průtoků. Totožné jsou tenkostěnné Hookeovské modely (tmavě červená a oranžová). Zbylé silnostěnné varianty (světle červená, fialová a zelená) si jsou taktéž docela podobné.



Obr. 19: Přehled všech variant naměřených statických tlaků v závislosti na čase



Obr. 20: Statické tlaky v závislosti na čase z modelů nH, H a MR



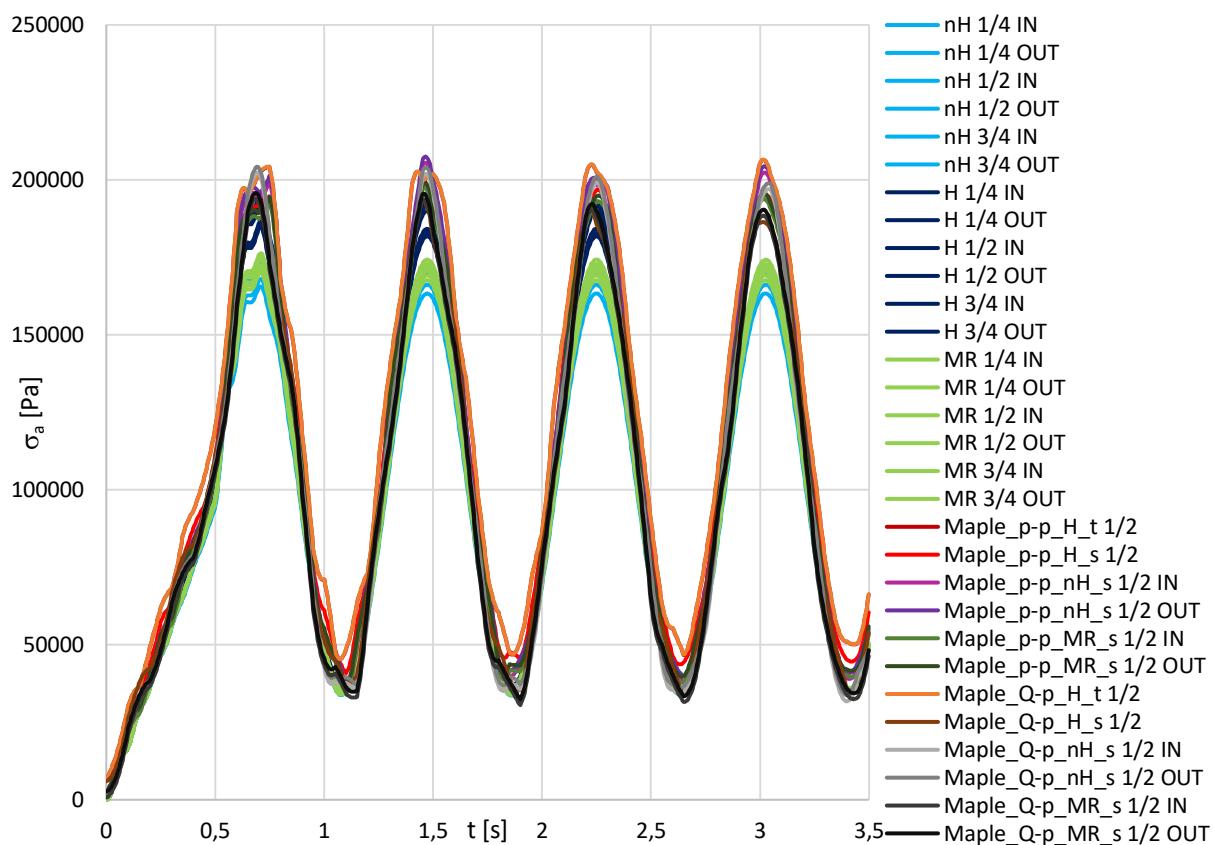
Obr. 21: Statické tlaky v závislosti na čase z výsledků programu Maple

4.5 Napětí na stěnách trubice

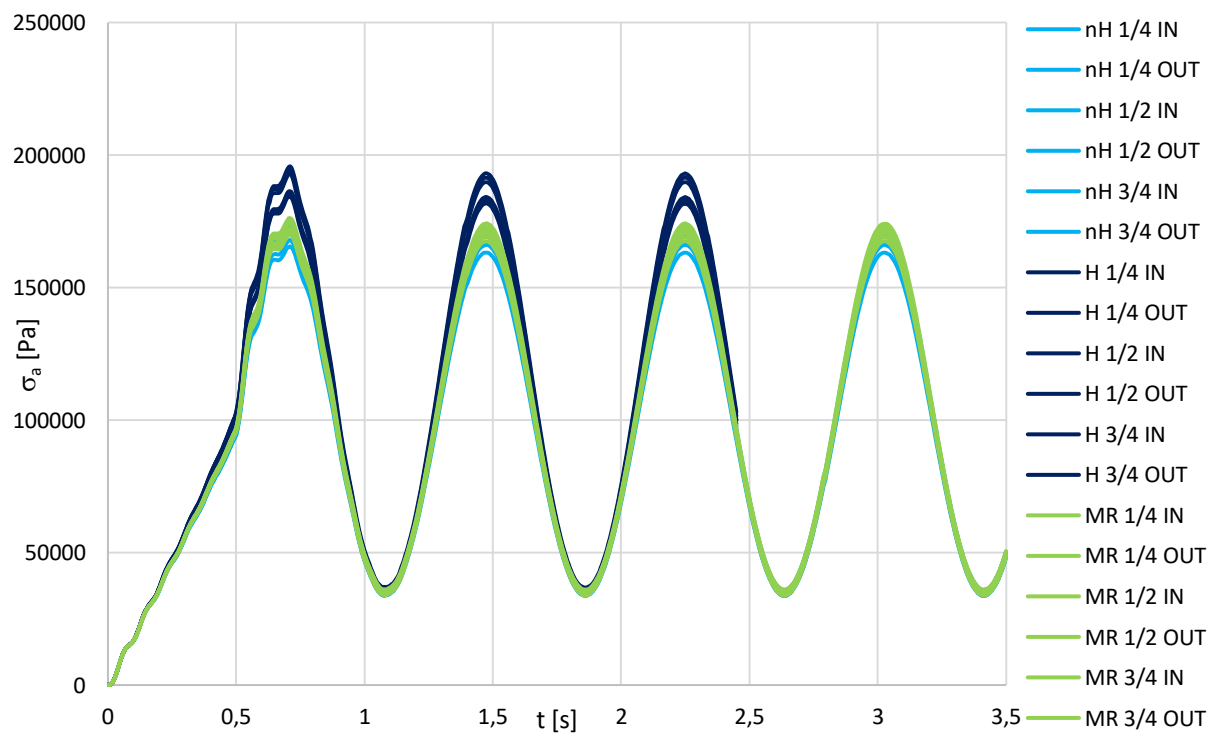
V následující kapitole jsou uvedeny časové závislosti axiálních, radiálních a tečných napětí. Protože frekvence jsou nízké, nedochází k žádnému zpoždění mezi napětím a deformací. Změna napětí vyvolá okamžitou změnu deformace. Nejprve je opět uveden přehled všech variant naměřených napětí a poté jsou kvůli přehlednosti rozděleny. Jak v axiálních, tak i v radiálních a tečných napětích jsou vnitřní napětí větší a vnější menší.

Opět ve všech případech (axiální, radiální, tečné napětí) jsou nelineární materiálové modely neo-Hooke a Mooney-Rivlin téměř totožné a velice podobné výsledky dosahuje i lineární Hooke, který má jen o něco větší amplitudy, hlavně v případě axiálních a tečných napětí. Radiální napětí na vnější straně trubice vychází téměř nulové, což je správně.

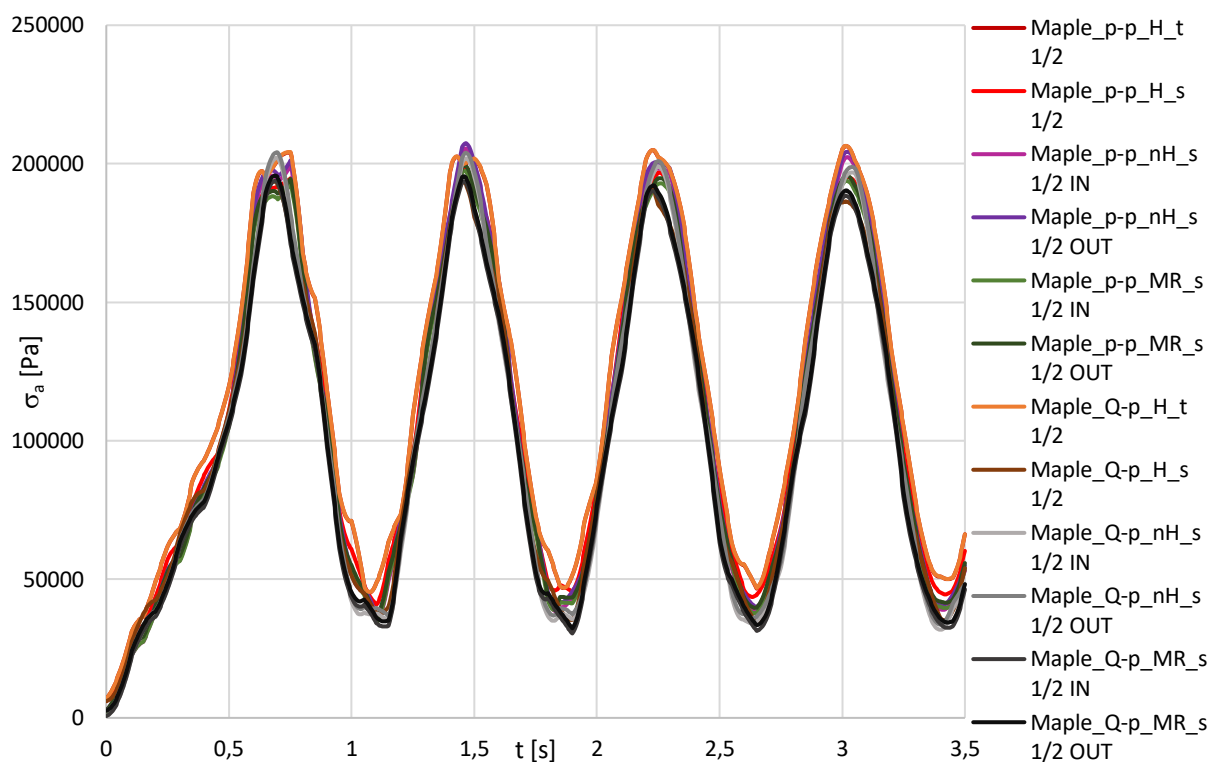
Co se týče výsledků z programu Maple, tak celkově mají větší amplitudy a dosahují vyšších hodnot tlaků. Radiální napětí na vnější straně trubice jsou nulová.



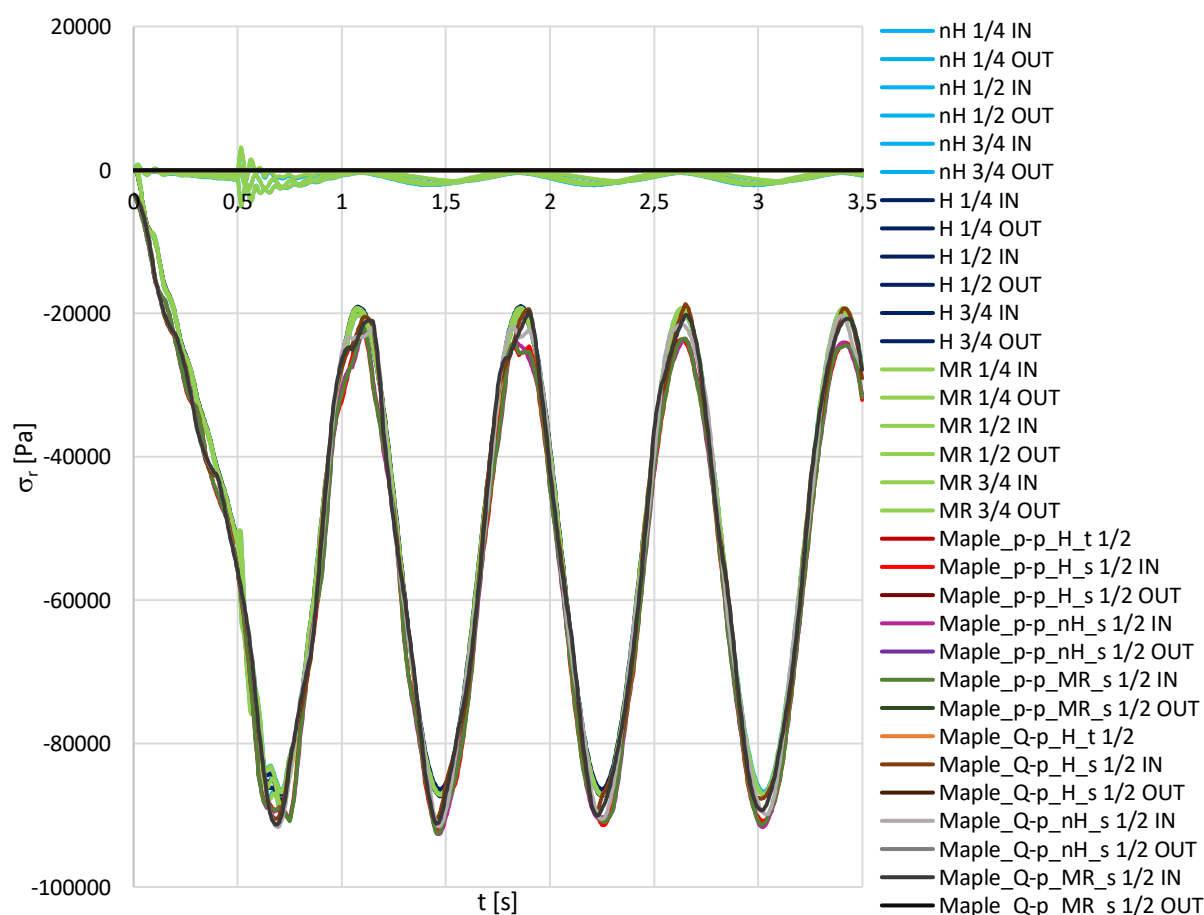
Obr. 22: Přehled všech variant naměřených axiálních napětí v závislosti na čase



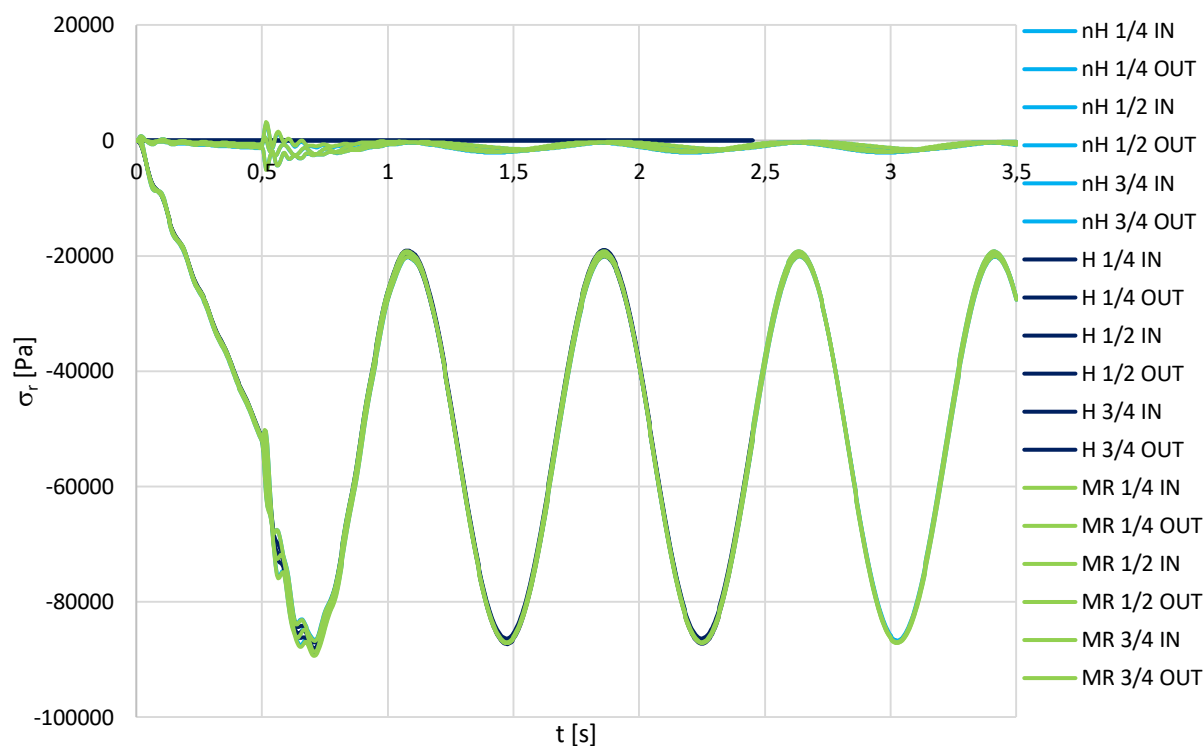
Obr. 23: Axiální napětí v závislosti na čase z modelů nH, H a MR



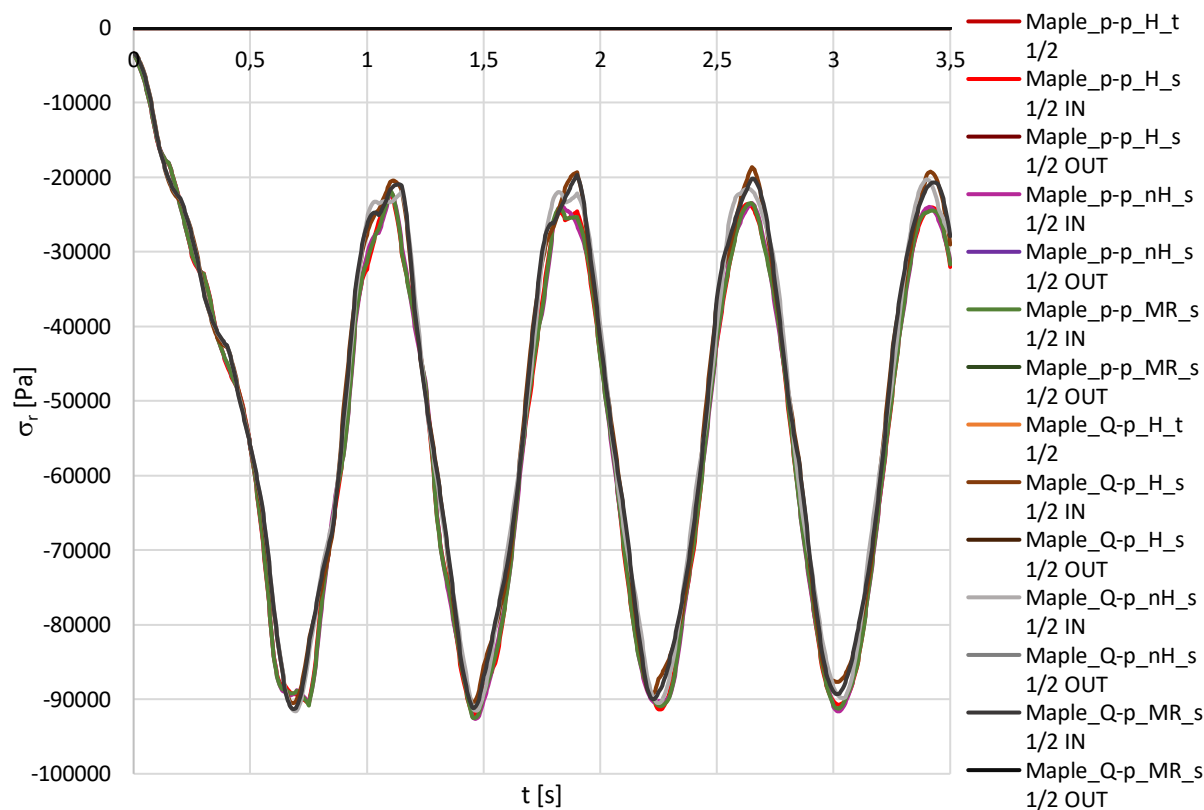
Obr. 24: Axiální napětí v závislosti na čase z výsledků programu Maple



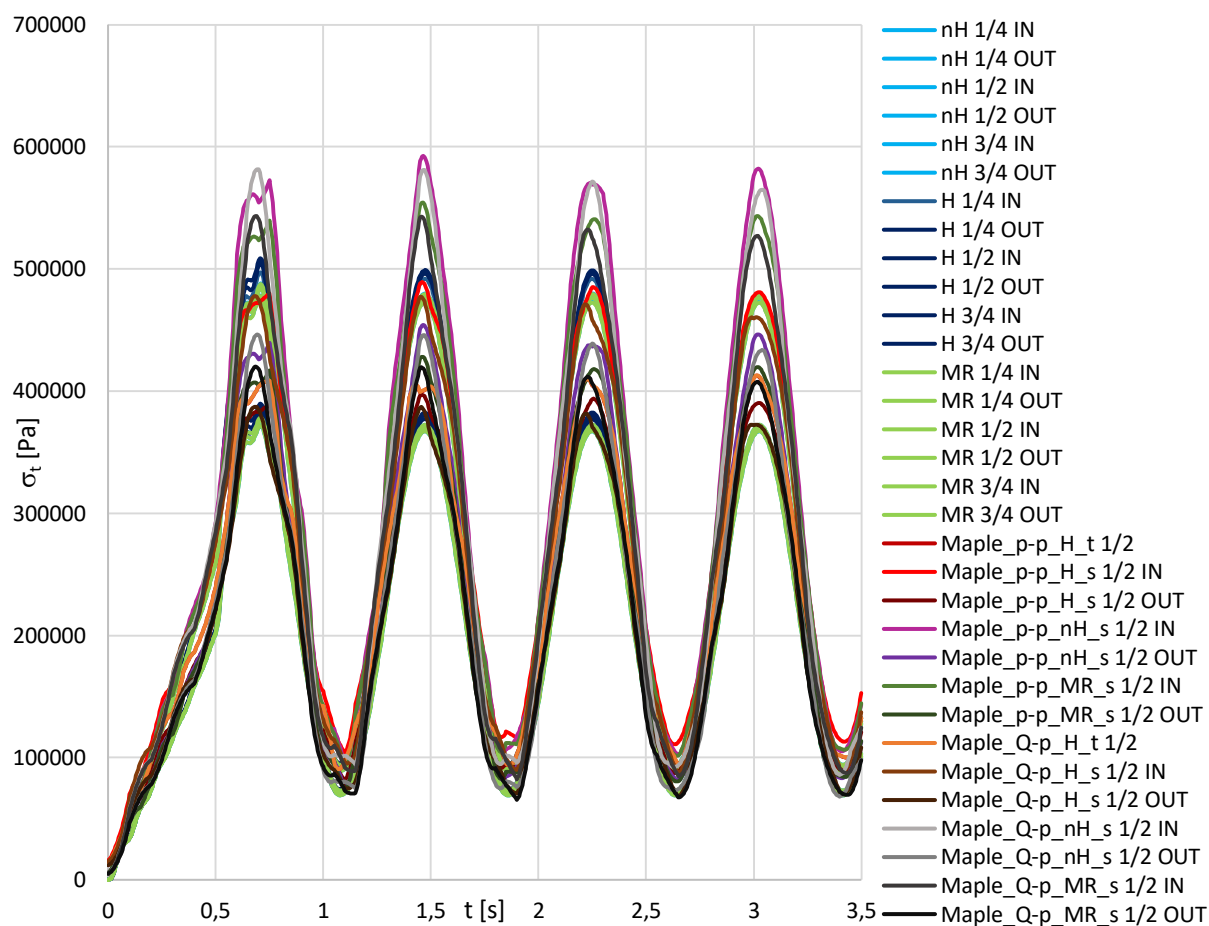
Obr. 25: Přehled všech variant naměřených radiálních napětí v závislosti na čase



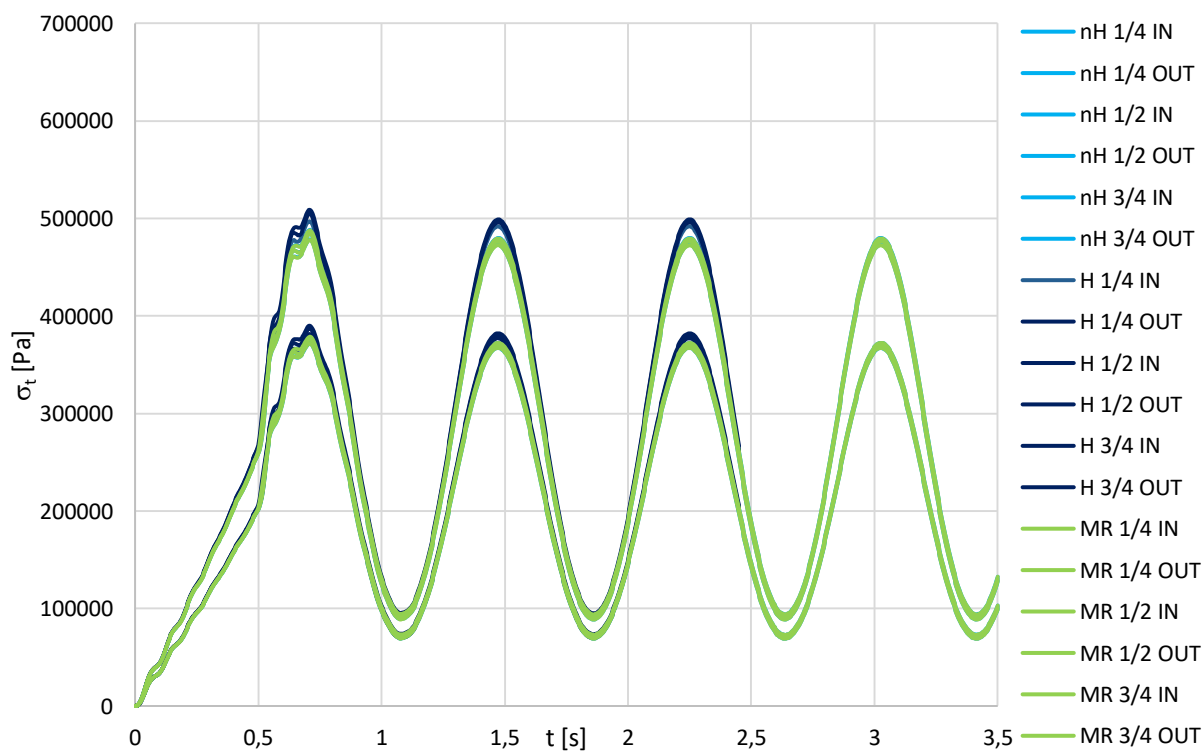
Obr. 26: Radiální napětí v závislosti na čase z modelů nH, H a MR



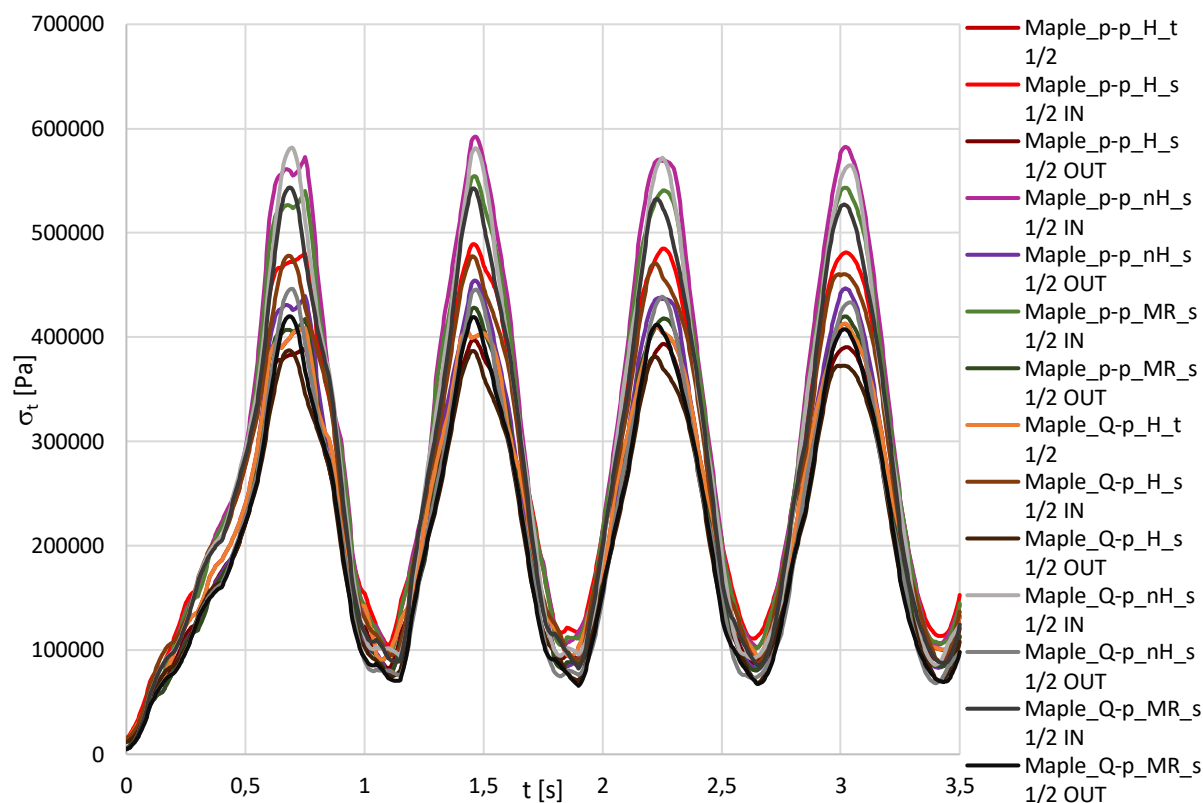
Obr. 27: Radiální napětí v závislosti na čase z výsledků programu Maple



Obr. 28: Přehled všech variant naměřených tečných napětí v závislosti na čase



Obr. 29: Tečná napětí v závislosti na čase z modelů nH, H a MR

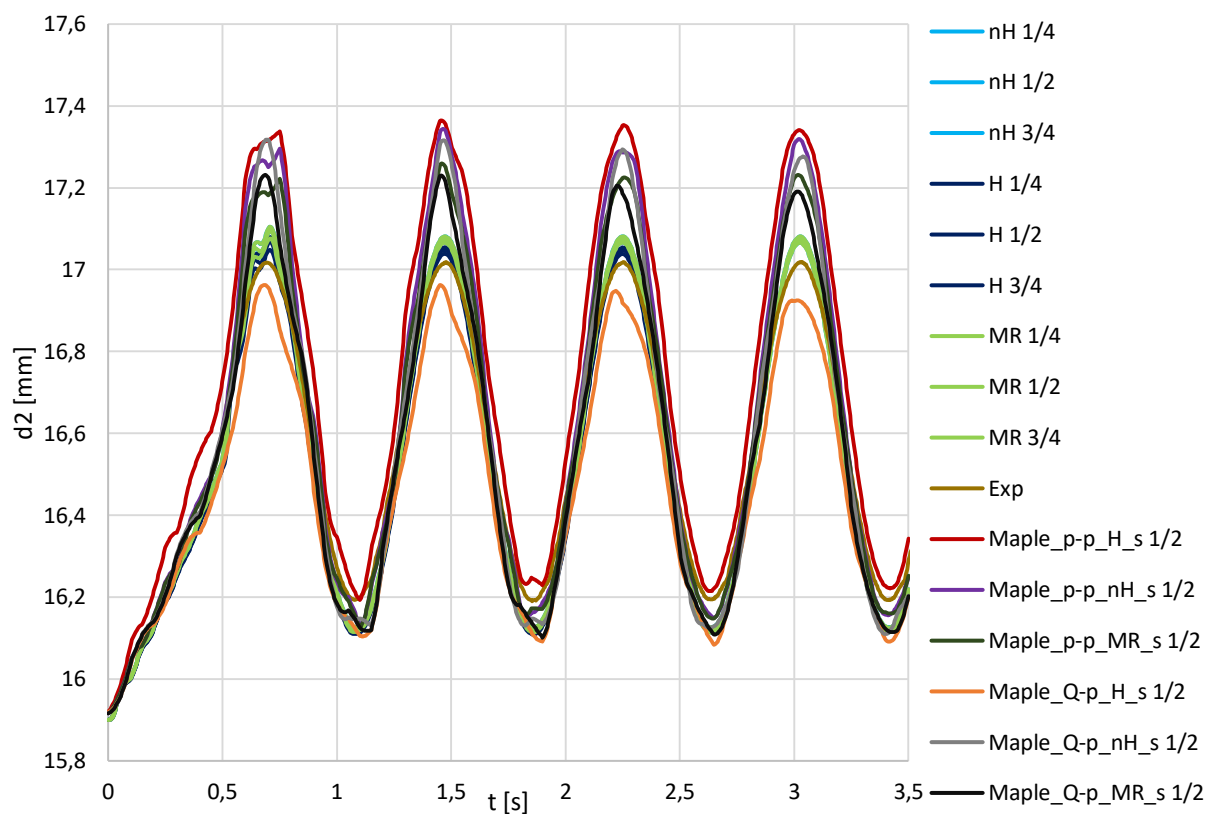


Obr. 30: Tečná napětí v závislosti na čase z výsledků programu Maple

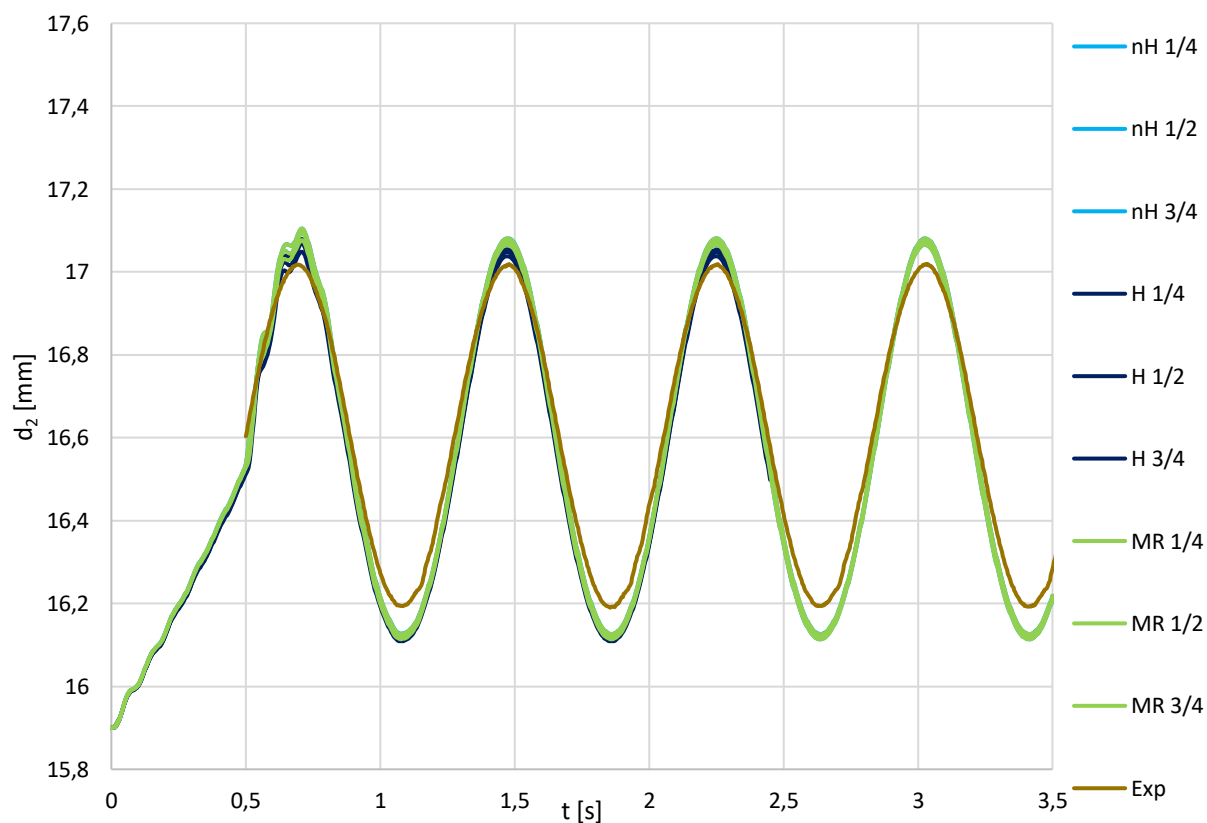
4.6 Změna průměru a tloušťky trubice

Zde budeme porovnávat měnící se vnější průměry trubice a její tloušťky. Po rozdělení jde z (Obr. 32) a (Obr. 35) vidět, že výsledky z programu ANSYS se příliš neliší. V softwaru Maple vychází změny průměrů i tlouštěk oproti výsledkům ze strukturální analýzy podstatně větší až na pár výjimek (Maple_Q-p_H_t 1/2 a Maple_Q-p_H_s 1/2) a v případě tloušťky (Obr. 34) a (Obr. 36) i Maple_p-p_H_s 1/2. U vnějšího průměru je ale Maple_p-p_H_s 1/2 posazen výše (Obr. 31) a (Obr. 33), pravděpodobně proto, že počáteční podmínky byly nepatrně odlišné.

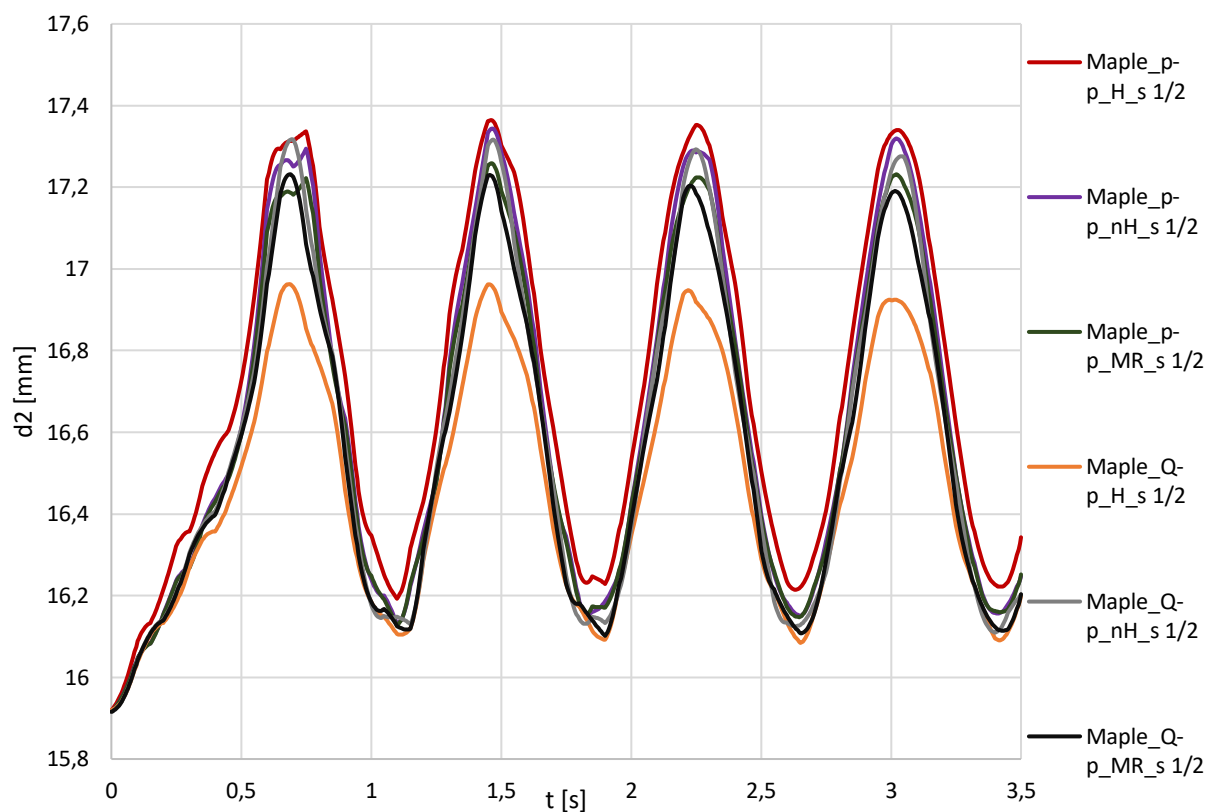
Co se týče srovnání experimentálních výsledků s těmi ze strukturální analýzy, tak ty se příliš neliší a lze tudíž konstatovat, že výsledky z programu ANSYS jsou velice uspokojující.



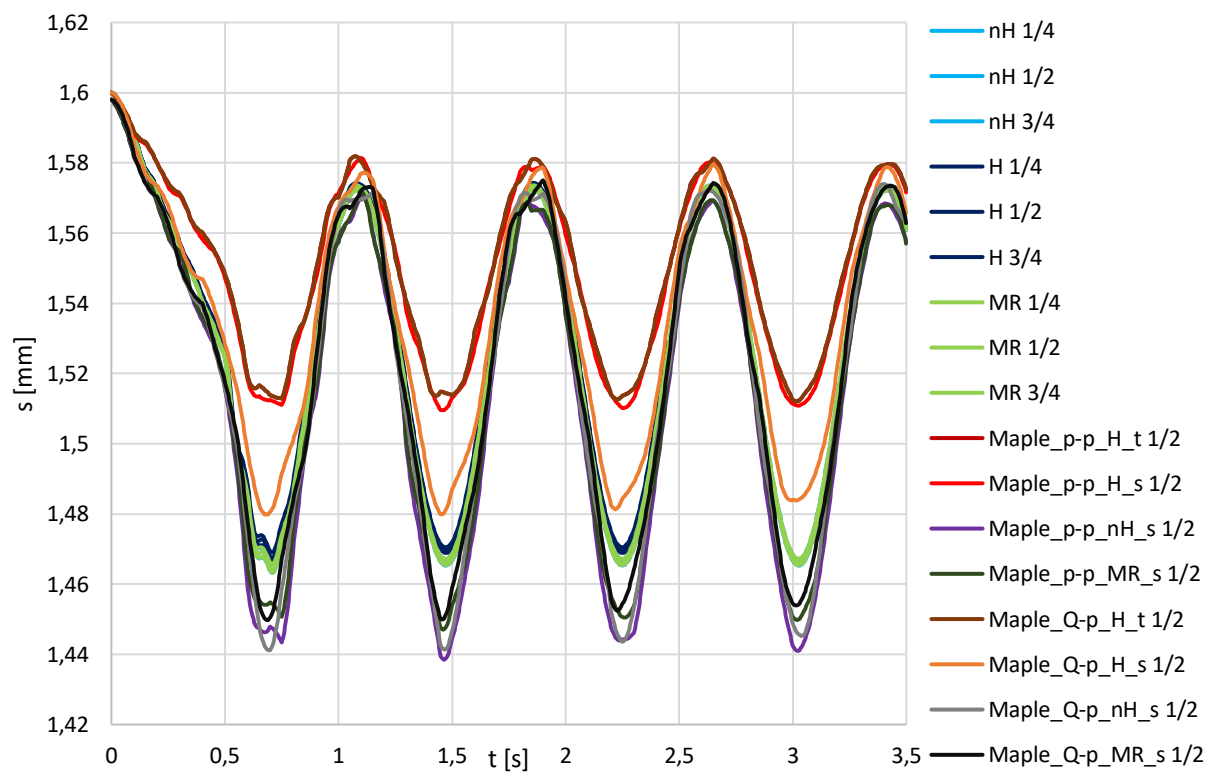
Obr. 31: Přehled všech variant naměřených vnějších průměrů trubice v závislosti na čase



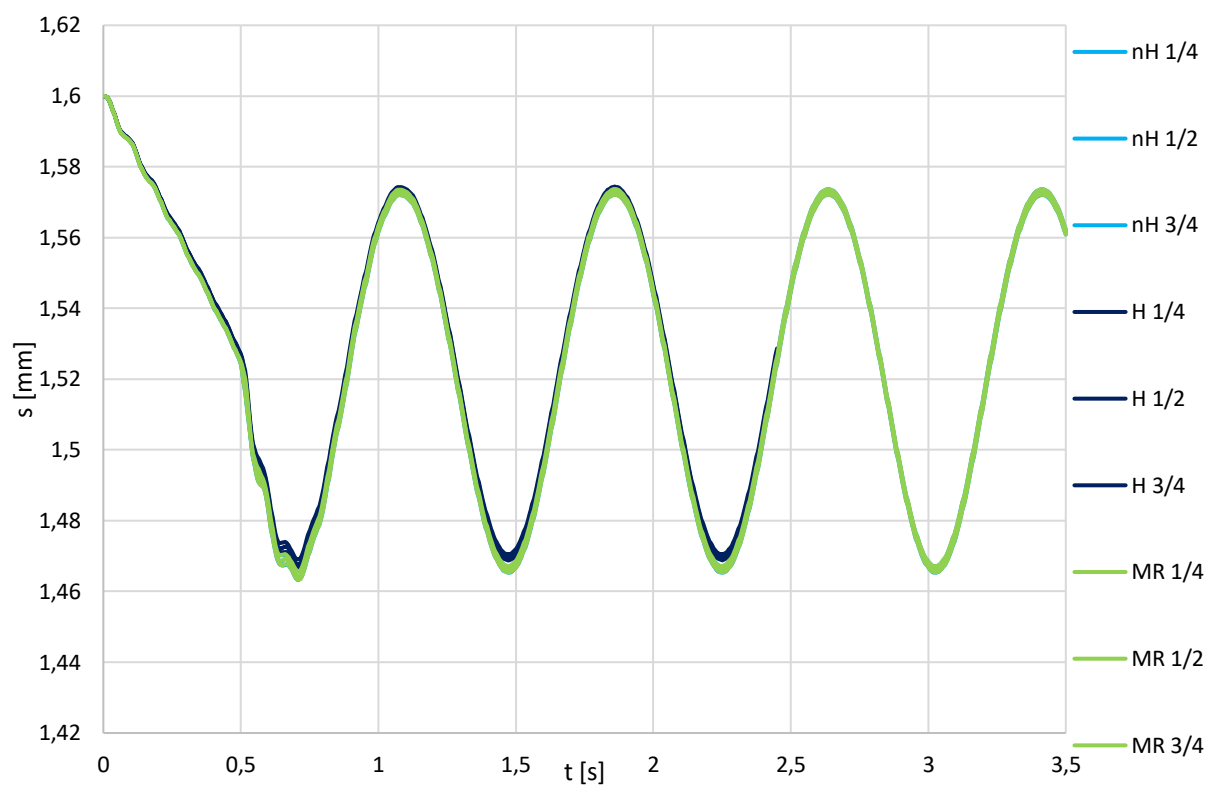
Obr. 32: Vnější průměry trubice v závislosti na čase z modelů nH, H a MR



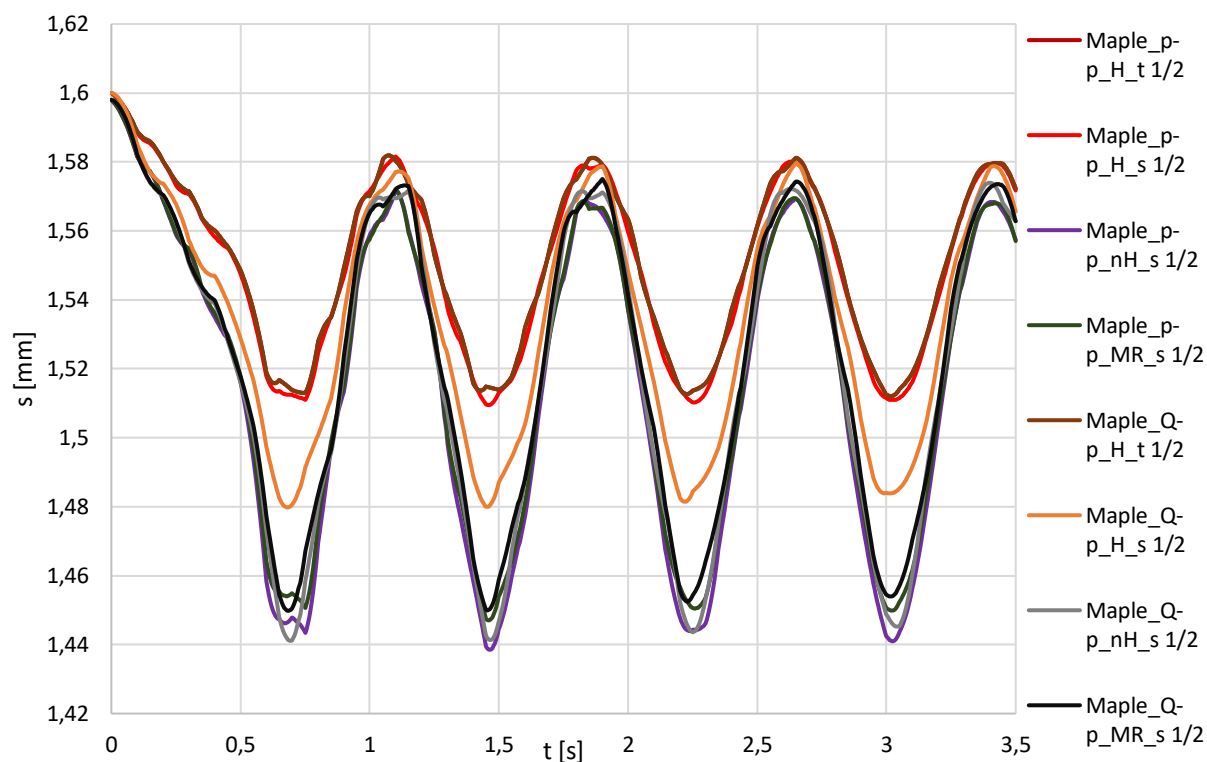
Obr. 33: Vnější průměry trubice v závislosti na čase z výsledků programu Maple



Obr. 34: Přehled všech variant naměřených tloušťek trubice v závislosti na čase



Obr. 35: Tloušťky trubice v závislosti na čase z modelů nH , H a MR



Obr. 36: Tloušťky trubice v závislosti na čase z výsledků programu Maple

5 ZÁVĚR

Byla provedena rešeršní studie a výpočtová analýza pulzací pružné trubice pro čtyři různé varianty výpočtů v softwaru ANSYS a osm variant v programu Maple. Byly popsány základní rovnice dynamiky proudění, lineární a nelineární modely materiálů. Byl proveden rozbor napětí v rotačně symetrických nádobách tenkostěnných i silnostěnných. Byly ozřejměny základní numerické metody (MKO a MKP) a taktéž popsány jednotlivé části simulačních softwarů.

První variantou v softwaru ANSYS bylo, že materiál trubice byl brán jako lineární Hookeovský materiálový model. Ve druhém a třetím případě jako nelineární neo-Hookeovský a Mooney-Rivlinův model. Čtvrtý případ trubici ani neuvažoval a byla zde použita pouze podmínka wall, tenhle případ tak sloužil pouze k porovnání, jak by situace vypadala, kdyby kapalina proudila tuhou (nepružnou) trubicí.

V programu Maple byly použity různé varianty Hookeovského, neo-Hookeovského a Mooney-Rivlinova materiálového modelu z hlediska tenkostěnných a silnostěnných trubic.

Ve výpočetní části je popsán postup modelování geometrie trubice a kapaliny, jaké bylo provedeno nastavení numerického výpočtu kapaliny ve Fluentu a nastavení strukturální analýzy trubice. Také bylo stručně popsáno psaní numerického kódu v programu Maple.

V poslední kapitole byla uvedena veškerá vyhodnocená data z programů ANSYS, Maple a Excel. Bylo zjištěno, že nejlepších výsledků dosahuje 3D analýza z programového balíčku ANSYS, která v celku koresponduje s experimentálními výsledky. Výsledky z 1D analýzy programu Maple mají větší amplitudy a dosahují vyšších hodnot. Důvod těchto odlišností je dán především tlakem p , který v programu Maple vychází větší. Pokud by velikost tlaku korespondovala s ANSYS simulací, pak by deformace trubice získané ze softwaru Maple měly být takřka identické s ANSYS simulací. Ostatně větší tlak znamená i jiná napětí, viz základní rovnice neo-Hookeovských a Mooney-Rivlinovských napětí. Takže pokud bude tlak větší, znamená to např., že problém bude v části 1D matematicko-fyzikálního modelu, která popisuje pohybovou rovnici a ztráty v systému.

Z porovnání pružné trubice s tuhou trubicí plyne značný rozdíl z hlediska pulzací průtoku. Pokud budou porovnávány lineární a nelineární vlastnosti materiálu trubice, tak se v zásadě výsledky od sebe moc neliší.

Řešení tohoto problému, pulzací toku kapaliny v pružných trubicích, je obecně velmi složité a komplikované.

6 SEZNAM POUŽITÝCH ZDROJŮ

- [1] ŠEDIVÝ, Dominik, Jiří BURŠA a Simona FIALOVÁ. Experimental and Numerical Investigation of Flow Field in Flexible Tube. *IOP Conference Series: Earth and Environmental Science*. IAHR, 2019, **240**(072023). DOI: <https://doi.org/10.1088/1755-1315/240/7/072023>.
- [2] GIANNOPAPA, Christina. *Fluid Structure Interaction in Flexible Vessels*. London, 2004. Dissertation Thesis. King's College London.
- [3] KRAJÍČEK, Milan, Jan PEREGRIN, Miloslav ROČEK a Pavel ŠEBESTA. *Chirurgická a intervenční léčba cévních onemocnění*. První. Praha: Grada Publishing, 2007, 436 s. ISBN 978-80-247-0607-8.
- [4] BASFORD, Jeffrey. The Law of Laplace and Its Relevance to Contemporary Medicine and Rehabilitation. *Arch Phys Med Rehabil*. 2002, **83**(8), 1165–1170. DOI: <https://doi.org/10.1053/apmr.2002.33985>. Dostupné také z: <https://doi.org/10.1053/apmr.2002.33985>
- [5] KŘEN, Jiří, Josef ROSENBERG a Přemysl JANÍČEK. *Biomechanika*. První. Plzeň: Západočeská univerzita, 2006. ISBN 80-7082-792-0.
- [6] MARŠÍK, František a Ivan DVOŘÁK. *Biotermodynamika*. 2. upravené a rozšířené. Praha: Academia, 1998. ISBN 80-200-0664-8.
- [7] SLOMIANKA, Lutz. Vascular System. *Blue Histology* [online]. The University of Western Australia - School of Anatomy and Human Biology, 2009 [cit. 2019-04-12]. Dostupné z: <http://www.lab.anhb.uwa.edu.au/mb140/corepages/vascular/vascular.htm>
- [8] POCHYLÝ, František. *Dynamika tekutinových systémů*. První. Brno: Rektorát VUT, 1990, 110 s. ISBN 80-214-0139-7.
- [9] ŠTIGLER, Jaroslav. *Teorie Hydraulických strojů: Základní rovnice a zákony v mechanice tekutin*. b.r. Přednáška 3.
- [10] ŠEBESTA, Jaroslav a Vladimír HABÁN, Jaroslav ŠEBESTA, ed. Tlakové pulzace v plastových trubcích a jejich využití k identifikaci materiálových vlastností. In: ZOLOTAREV, Igor. *Interakce a zpětné vazby '2003*. Praha: Ústav termomechaniky AV ČR, 2003, s. 163-170. ISBN 80-85918-84-6.
- [11] ŠOB, František. *Hydromechanika*. První. Brno: Akademické nakladatelství CERM, 2002, 240 s. Učební texty vysokých škol. ISBN 80-214-2037-5.
- [12] KLAS, Roman, František POCHYLÝ a Simona FIALOVÁ. *FSI analýza pružné trubice*. Brno, 2019, (10117-19444), 39 s. Výzkumná zpráva, VUT-EU 13303-QR-01-19.

- [13] JANÍČEK, Přemysl, Emanuel ONDRÁČEK, Jan VRBKA a Jiří BURŠA. *Mechanika těles: Pružnost a pevnost I*. První. Brno: Akademické nakladatelství CERM, 2004, 288 s. Učební texty vysokých škol. ISBN 80-214-2592-X.
- [14] VRBKA, Jan. *Pružnost a pevnost I*. První. Brno, 2011. Učební text.
- [15] NĚMEC, Ivan. *Nelineární mechanika: Základy nelineární mechaniky*. První. Brno, 2006, 70 s. Studijní opory.
- [16] CRISFIELD, Michael. *Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures: Volume 1: Essentials*. 3rd. Imperial College of Science, Technology and Medicine, London, UK: Wiley, 2000. ISBN 0-471-92956-5.
- [17] CRISFIELD, Michael. *Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures: Volume 2: Advanced Topics*. 3rd. Imperial College of Science, Technology and Medicine, London, UK: Wiley, 2000. ISBN 0-471-95649-X.
- [18] HORNÝ, Lukáš. *Patobiomechanika srdečněcévního systému, I. díl*. První. Praha: ČVUT, 2014, 104 s. ISBN 978-80-01-05473-4.
- [19] MAREŠ, Tomáš. Rotačně symetrické úlohy. *Pružnost a pevnost 2* [online]. b.r. [cit. 2019-05-15]. Dostupné z: http://drone.fsid.cvut.cz/pp2/Rotacne_symetricke.pdf
- [20] BURŠA, Jiří. *Neo-Hookeovské materiály v inženýrské mechanice*. První. Brno: VUTUM, 2011. Vědecké spisy VUT v Brně. ISBN 978-80-214-4250-4. ISSN 1213-418X.
- [21] RIVLIN, R. a D. SAUNDERS. *Large Elastic Deformations of Isotropic Materials: VII. Experiments on the Deformation of Rubber*. London, UK: Royal Society, 1951, 38 p. Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences, Vol. 243, No. 865, pp. 251-288. ISSN 1364-503X.
- [22] Chapter 7: Material Models Used in Explicit Dynamics Analysis: Hyperelasticity. ANSYS [online]. b.r. [cit. 2019-04-18]. Dostupné z: <https://ansyshelp.ansys.com>
- [23] BURŠA, Jiří. *Studijní opory - PP2* [online]. b.r. [cit. 2019-05-15]. Dostupné z: http://www.old.umt.fme.vutbr.cz/~jbursa/Stud_opory/Stud_opory.htm
- [24] MALINOVSKÝ, Vít. *Teorie konstrukcí: Skořepiny* [online]. b.r. [cit. 2019-05-23]. Dostupné z: <http://mech.fd.cvut.cz/members/malinovsky/teorie-konstrukci/5%20-%20Skorepiny.pdf>. Přednáška V.
- [25] RUDOLF, Pavel. *Výpočtové modelování proudění: PDE diskretizace*. b.r. Přednáška 2.
- [26] *Počítačová dynamika tekutin, CFD: Metoda konečných objemů* [online]. b.r. [cit. 2019-05-23]. Dostupné z: https://vscht.cz/uchi/ped/cfd/cfd.metoda_konecných_objemu.pdf
- [27] PETRUŠKA, Jindřich. *Počítačové metody mechaniky II* [online]. VUT v Brně, 2003 [cit. 2019-03-31].

-
- [28] PETRUŠKA, Jindřich. *MKP v inženýrských výpočtech* [online]. VUT v Brně, 2011 [cit. 2019-03-31].
- [29] Computer-aided Engineering. *Wikiwand* [online]. 2011 [cit. 2019-04-04]. Dostupné z: http://www.wikiwand.com/en/Computer-aided_engineering
- [30] KESTI, Jari a Simon OLSSON. *Fluid Structure Interaction Analysis on the Aerodynamic Performance of Underbody Panels*. První. Göteborg, Sweden: Chalmers University of Technology, 2014. ISSN 1652-8557.
- [31] ANSYS Student: Problem Size Limits. *ANSYS: ANSYS Free Student Software Downloads* [online]. b.r. [cit. 2019-03-22]. Dostupné z: <https://www.ansys.com/academic/free-student-products>

7 SEZNAM OBRÁZKŮ A TABULEK

Obrázky

Obr. 1: Průřez tepnou a její vrstvy [7]	14
Obr. 2: Schéma elektrohydraulická analogie [12]	18
Obr. 3: Napětí ve stěně trubice [12]	21
Obr. 4: Zatížení, rozměry a deformace trubice [12]	21
Obr. 5: Schéma výpočtu	33
Obr. 6: Geometrie trubice a kapaliny	35
Obr. 7: Detail sítě modelu trubice	36
Obr. 8: Detail sítě modelu kapaliny	36
Obr. 9: Okrajové podmínky kapaliny	37
Obr. 10: Okrajové podmínky a vazby trubice	39
Obr. 11: Kontura hlediska $y+$ na vnitřní stěně trubice	41
Obr. 12: Přehled všech variant naměřených objemových průtoků v závislosti na čase	42
Obr. 13: Objemové průtoky v závislosti na čase z modelů nH, H a MR	43
Obr. 14: Detail objemových průtoků v závislosti na čase z modelů nH, H a MR	43
Obr. 15: Objemové průtoky v závislosti na čase z výsledků programu Maple	44
Obr. 16: Rychlostní profily v 1/4 trubice v ose x v závislosti na poloměru	45
Obr. 17: Rychlostní profily v 1/4 trubice v ose y v závislosti na poloměru	46
Obr. 18: Rychlostní profily v 1/4 trubice v ose z v závislosti na poloměru	47
Obr. 19: Přehled všech variant naměřených statických tlaků v závislosti na čase	48
Obr. 20: Statické tlaky v závislosti na čase z modelů nH, H a MR	48
Obr. 21: Statické tlaky v závislosti na čase z výsledků programu Maple	49
Obr. 22: Přehled všech variant naměřených axiálních napětí v závislosti na čase	50
Obr. 23: Axiální napětí v závislosti na čase z modelů nH, H a MR	50
Obr. 24: Axiální napětí v závislosti na čase z výsledků programu Maple	51
Obr. 25: Přehled všech variant naměřených radiálních napětí v závislosti na čase	51
Obr. 26: Radiální napětí v závislosti na čase z modelů nH, H a MR	52
Obr. 27: Radiální napětí v závislosti na čase z výsledků programu Maple	52
Obr. 28: Přehled všech variant naměřených tečných napětí v závislosti na čase	53
Obr. 29: Tečná napětí v závislosti na čase z modelů nH, H a MR	53
Obr. 30: Tečná napětí v závislosti na čase z výsledků programu Maple	54

Obr. 31: Přehled všech variant naměřených vnějších průměrů trubice v závislosti na čase	55
Obr. 32: Vnější průměry trubice v závislosti na čase z modelů nH, H a MR.....	55
Obr. 33: Vnější průměry trubice v závislosti na čase z výsledků programu Maple.....	56
Obr. 34: Přehled všech variant naměřených tloušťek trubice v závislosti na čase	56
Obr. 35: Tloušťky trubice v závislosti na čase z modelů nH, H a MR	57
Obr. 36: Tloušťky trubice v závislosti na čase z výsledků programu Maple	57
Obr. 37: Rychlostní profily v 1/2 trubice v ose x v závislosti na poloměru	89
Obr. 38: Rychlostní profily v 1/2 trubice v ose y v závislosti na poloměru	90
Obr. 39: Rychlostní profily v 1/2 trubice v ose z v závislosti na poloměru	91
Obr. 40: Rychlostní profily ve 3/4 trubice v ose x v závislosti na poloměru	92
Obr. 41: Rychlostní profily ve 3/4 trubice v ose y v závislosti na poloměru	93
Obr. 42: Rychlostní profily ve 3/4 trubice v ose z v závislosti na poloměru.....	94

Tabulky

Tab. 1: Materiálové vlastnosti jednotlivých modelů	38
Tab. 2: Přehled všech osmi variant kódů napsaných v programu Maple	40

8 SEZNAM POUŽITÝCH SYMBOLŮ A ZKRATEK

Symbols

a_i	$[W \cdot K^{-1}]$	koeficienty základní rovnice MKO
$a_{(f)i}$	$[N]$	reprezentant hmotnostní síly
B	$[kg \cdot s^{-1}]$	globální matice tlumení
C	$[N^{-1} \cdot m^5]$	hydraulická kapacita
C_i, C_{ij}	$[Pa]$	materiálová konstanta vztahující se k deformační odezvě
C_{ijkl}	$[Pa]$	materiálový tenzor
C_m	$[Pa \cdot m^2]$	konstanta
d	$[Pa^{-1}]$	parametr nestlačitelnosti
\hat{d}	$[m]$	maximální průměr průřezu trubice
\check{d}	$[m]$	minimální průměr průřezu trubice
d_1, d_2	$[m]$	vnitřní a vnější průměr trubice
d_{10}, d_{20}	$[m]$	vnitřní a vnější průměr trubice v klidovém stavu
D_k	$[Pa]$	materiálová konstanta vztahující se k objemové odezvě
δ	$[Pa^{-1}]$	součinitel objemové stlačitelnosti
δ_{ij}	$[-]$	Kroneckerovo delta
ΔV	$[m^3]$	kontrolní objem kapaliny v trubici
E	$[Pa]$	Youngův modul (modul pružnosti v tahu)
E_K	$[Pa]$	modul objemové pružnosti kapaliny
\dot{e}_{kk}	$[s^{-1}]$	stopa tenzoru rychlosti v_{ij}
\dot{e}_{ij}	$[s^{-1}]$	symetrická část tenzoru rychlosti v_{ij}
ε	$[-]$	poměrná deformace (přetvoření)
ε_{ij}	$[-]$	tenzor poměrné deformace
ε_{kk}	$[-]$	stopa tenzoru malých deformací
$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$	$[-]$	délková přetvoření v osách x, y, z
$\varepsilon_a, \varepsilon_r$	$[-]$	délková přetvoření v axiálním a radiálním směru
$\varepsilon_t, \varepsilon_{t1}, \varepsilon_{t2}$	$[-]$	délková přetvoření v tangenciálním směru
f	$[s^{-1}]$	frekvence tlakových pulzací
$f_{vstup}, f_{výstup}$	$[Pa]$	funkce tlakových okrajových podmínek na vstupu a výstupu

F, F_{ij}	$[-]$	deformační gradient
F_V	$[N]$	globální vektor vnějšího silového zatížení
ϕ_i		skalární proměnná
g	$[m \cdot s^{-2}]$	tíhové zrychlení
G	$[Pa]$	modul pružnosti ve smyku
$\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$	$[-]$	úhlová přetvoření v rovinách xy, yz, zx
Γ	$[m^2]$	plocha představující plášť trubice
H	$[N \cdot m^{-5} \cdot s^2]$	odpor proti zrychlení
H_I, H_{II}	$[m]$	hloubka kapaliny
I_i	$[-]$	invarianty tenzoru
\bar{I}_i	$[-]$	modifikované invarianty tenzoru
J	$[-]$	Jakobián transformace
K	$[N \cdot m^{-1}]$	globální matice tuhosti
K_C	$[Pa]$	modul objemové pružnosti
K_K	$[Pa]$	korigovaný modul objemové pružnosti
K_m	$[Pa]$	konstanta
ξ	$[-]$	součinitel délkových ztrát (koeficient tření)
l	$[m]$	délka trubice
$\lambda_{a1,2}$	$[-]$	vnitřní a vnější poměrná protažení v axiálním směru
λ_i	$[-]$	vlastní čísla tenzoru
λ_L	$[Pa]$	Laméův první (elastický) koeficient
$\lambda_{r1,2}$	$[-]$	vnitřní a vnější poměrná protažení v radiálním směru
$\lambda_{t1,2}$	$[-]$	vnitřní a vnější poměrná protažení v obvodovém směru
λ_V	$[Pa \cdot s]$	objemová (druhá) viskozita
m	$[kg]$	hmotnost kapaliny
M	$[kg]$	globální matice hmotnosti
μ	$[-]$	Poissonovo číslo
μ_L	$[Pa]$	Laméův druhý (elastický) koeficient
μ_V	$[Pa \cdot s]$	dynamická (první) viskozita
n	$[-]$	normálový jednotkový vektor
ν	$[m^2 \cdot s^{-1}]$	kinematická viskozita

O_v	[%]	ovalita
p	[Pa]	tlak
p_1, p_2	[Pa]	tlak působící na vnitřní a vnější stěnu trubice
p_I, p_{II}	[Pa]	vstupní a výstupní tlak
P	[J]	potenciální energie vnějšího zatížení
π	[–]	Ludolfovo číslo
Π	[J]	celková potenciální energie
Π_{ij}	[Pa]	tenzor nevratných napětí
Q	[m ³ · s ^{–1}]	objemový průtok kapaliny trubicí
Q_c	[m ³ · s ^{–1}]	stlačený objemový průtok
Q_I, Q_{II}	[m ³ · s ^{–1}]	vstupní a výstupní objemový průtok
Q_m	[kg · s ^{–1}]	hmotnostní průtok kapaliny trubicí
r, r_1, r_2	[m]	poloměr trubice, vnitřní a vnější poloměr trubice
r_{10}, r_{20}	[m]	vnitřní a vnější poloměr trubice v klidovém stavu
R	[N · m ^{–8} · s ²]	odpor proti pohybu
ρ	[kg · m ^{–3}]	hustota tekutiny
s, s_0	[m]	tloušťka trubice v zatíženém a nezatíženém stavu
S	[m ²]	průtočná plocha trubice
σ, σ_{ii}	[Pa]	napětí
$\sigma_a, \sigma_{a1}, \sigma_{a2}$	[Pa]	axiální napětí, vnitřní a vnější napětí v axiálním směru
σ_{ij}	[Pa]	tenzor napětí
$\sigma_r, \sigma_{r1}, \sigma_{r2}$	[Pa]	radiální napětí, vnitřní a vnější napětí v radiálním směru
$\sigma_t, \sigma_{t1}, \sigma_{t2}$	[Pa]	tangenciální napětí, vnitřní a vnější napětí v tangenciálním směru
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$	[Pa]	normálová napětí v osách x, y, z
t	[s]	čas
T	[s]	perioda tlakových pulzací
T_{ij}	[Pa]	tenzor plošných sil
$\tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$	[Pa]	smyková napětí v rovinách xy, yz, zx
u, v, w	[m]	posuvy v osách x, y, z
u_a	[m]	posuv v axiálním směru
u_{r1}, u_{r2}	[m]	posuv v radiálním směru na vnitřní a vnější stěně

U	$[m]$	nezávislý vektor posuvů
\dot{U}	$[m \cdot s^{-1}]$	nezávislý vektor rychlostí
\ddot{U}	$[m \cdot s^{-2}]$	nezávislý vektor zrychlení
V	$[m^3]$	objem kapaliny v trubici
V_T	$[m^3]$	elementární objem trubice
v_i	$[m \cdot s^{-1}]$	rychlost proudění tekutiny
v_{ij}	$[m \cdot s^{-1}]$	tenzor rychlosti
v_I, v_{II}	$[m \cdot s^{-1}]$	vstupní a výstupní rychlost
v_0	$[m \cdot s^{-1}]$	rychlost zvuku v kapalině
v_s	$[m \cdot s^{-1}]$	střední hodnota rychlosti proudění kapaliny v trubici
v_x, v_y, v_z	$[m \cdot s^{-1}]$	rychlost ve směru osy x, y a z
W	$[Pa]$	hustota deformační energie
W_E	$[J]$	energie napjatosti tělesa
x_i	$[m]$	polohová souřadnice
X_j	$[m]$	počáteční (referenční) souřadnice
$y+$	$[-]$	hledisko kvality sítě v blízkosti obtékané stěny
z_u		konstantní část zdrojového členu (okrajové podmínky)

Zkratky

CAE	computer-aided engineering
CFD	computational fluid dynamics
ERHD	Eulerovy rovnice hydrodynamiky
FEM	finite element method
H	Hooke
nH	neo-Hooke
MKO	metoda konečných objemů
MKP	metoda konečných prvků
MR	Mooney-Rivlin
UDF	user defined function
ZŘ	zjednodušené řešení

Příloha A: UDF

```
#include "udf.h"
#include <mem.h>
DEFINE_PROFILE(pr_inlet_exp, thread, position)
{
    face_t f;
    real t = CURRENT_TIME;
    if ((t>=0.0) && (t<0.5))
    {
        begin_f_loop(f, thread)
        {
            F_PROFILE(f, thread, position) = 102000.0*t;
        }
        end_f_loop(f, thread)
    }
    else
    {
        begin_f_loop(f, thread)
        {
            F_PROFILE(f, thread, position) = 151000.0+32913.5195*sin(1.2875*3.1415*2*t+2.24)-100000.0;
        }
        end_f_loop(f, thread)
    }
}
DEFINE_PROFILE(pr_outlet_exp, thread, position)
{
    face_t f;
    real t = CURRENT_TIME;
    if ((t>=0.0) && (t<0.5))
    {
        begin_f_loop(f, thread)
        {
            F_PROFILE(f, thread, position) = 104200.0*t;
        }
        end_f_loop(f, thread)
    }
    else
    {
        begin_f_loop(f, thread)
        {
            F_PROFILE(f, thread, position) = 157100.0+33500.0*sin(1.2875*3.1415*2*t+2.24)-100000.0;
        }
        end_f_loop(f, thread)
    }
}
```


Příloha B: POUŽITÉ KÓDY V PROGRAMU MAPLE

1 Tlak – tlak, Hooke, tenkostěnný

```

restart;
with(plots);
ρ := 998.2; f := 1.2875; Qnula := 0.00002475; dnula := 0.0127; snula := 0.0016; Lnula := 0.7; L := 0.7;
g := 9.81; K := 2.1E9; E := 4E6; λ := 0.052; Snula :=  $\frac{\pi \cdot dnula \cdot dnula}{4}$ ; pvnejši := 100000; μ := 0.5;
S(x,t) :=  $\frac{\pi \cdot d(x,t) \cdot d(x,t)}{4}$ ; Kc(x,t) :=  $\frac{K \cdot E \cdot s(x,t)}{K \cdot d(x,t) + E \cdot s(x,t)}$ ;

pvystup :=  $\begin{cases} 102\,000.0 \cdot t, & t < 0.5 \\ 151\,000 + 32\,913,5195 \cdot \sin(1,2875 \cdot 2 \cdot \pi \cdot t + 2,24) - 100\,000, & t \geq 0.5 \end{cases}$ ;

pvstup :=  $\begin{cases} 104\,200.0 \cdot t, & t < 0.5 \\ 157\,000 + 33\,500 \cdot \sin(1,2875 \cdot 2 \cdot \pi \cdot t + 2,24) - 100\,000, & t \geq 0.5 \end{cases}$ ;

R :=  $\frac{\rho \cdot \lambda \cdot L}{dnula} \cdot \frac{1}{2 \cdot Snula \cdot Snula}$ ; pnula_t := pvstup -  $\frac{\rho \cdot \lambda \cdot L}{dnula} \cdot \frac{Qnula \cdot Qnula}{2 \cdot Snula \cdot Snula} + \rho \cdot g \cdot x \Big|_{t=0}$ ;

dpnula_t :=  $\frac{\partial}{\partial t} \left( pvstup - \frac{\rho \cdot \lambda \cdot L}{dnula} \cdot \frac{Qnula \cdot Qnula}{2 \cdot Snula \cdot Snula} + \rho \cdot g \cdot x \right) \Big|_{t=0}$ ;

dnula_0_t := pvstup -  $\frac{dnula \cdot dnula}{2 \cdot E \cdot snula} \cdot pnula_t$ ;

snula_0_t :=  $\frac{dnula}{2 \cdot E \cdot (dnula + 2 \cdot snula)} \cdot (dnula \cdot (\mu - 1) + snula \cdot \mu) \cdot pnula_t$ ;

dLnula_0_t :=  $\frac{-Lnula}{E} \cdot \mu \cdot \frac{dnula}{2 \cdot snula} \cdot pnula_t$ ;

σ(x,t) :=  $\frac{p(x,t) \cdot d(x,t)}{2 \cdot s(x,t)}$ ; l(x,t) :=  $\left( \frac{(dnula + 2 \cdot snula)^2 - dnula \cdot dnula}{(d(x,t) + 2 \cdot s(x,t))^2 - d(x,t) \cdot d(x,t)} - 1 \right) \cdot Lnula$ ;

declare(p(x,t), Q(x,t), d(x,t));

IBC := {p(L,t) = pvystup + ρ · g · L, p(0,t) = pvstup,
        p(x,0) = pvstup|t=0 -  $\frac{\rho \cdot \lambda \cdot x}{dnula} \cdot \frac{Qnula \cdot Qnula}{2 \cdot Snula \cdot Snula} + \rho \cdot g \cdot x$ , Q(x,0) = 0 · Qnula,
        d(x,0) = dnula + 0 · dnula_0_t, s(x,0) = snula + 0 · snula_0_t,
        delka(x,0) = Lnula + 0 · dLnula_0_t};

sys_prutokova_rovnice
:=  $\left[ \frac{\partial Q(x,t)}{\partial t} \right.$ 
 $= \frac{Q(x,t) \cdot d(x,t)}{E \cdot s(x,t)} \cdot \frac{\partial p(x,t)}{\partial t} + \frac{S(x,t)}{\rho} \cdot \left( -\frac{\partial p(x,t)}{\partial x} + \rho \cdot g - \frac{\rho \cdot \lambda}{d(x,t)} \cdot \frac{Q(x,t) \cdot |Q(x,t)|}{2 \cdot S(x,t) \cdot S(x,t)} \right),$ 
 $\frac{\partial}{\partial t} p(x,t) = -\frac{Kc(x,t)}{S(x,t)} \cdot \left( \frac{\partial Q(x,t)}{\partial x} - \frac{Q(x,t) \cdot d(x,t)}{E \cdot s(x,t)} \cdot \frac{\partial p(x,t)}{\partial x} \right), \frac{\partial d(x,t)}{\partial t}$ 
 $= \frac{d(x,t) \cdot d(x,t)}{2 \cdot E \cdot s(x,t)} \cdot (1 - \mu^2) \cdot \frac{\partial p(x,t)}{\partial t}, \frac{\partial s(x,t)}{\partial t}$ 
 $= -\frac{s(x,t)}{d(x,t) + 2 \cdot s(x,t)} \cdot \frac{\partial d(x,t)}{\partial t}, \frac{\partial delka(x,t)}{\partial t} = \frac{-delka(x,t)}{E} \cdot \frac{\mu \cdot d(x,t)}{2 \cdot s(x,t)} \cdot \frac{\partial p(x,t)}{\partial t} \Big]$ ;

fcns_sys_prutokova_rovnice := {Q(x,t), p(x,t), d(x,t), s(x,t), delka(x,t)};

```

```

prikaz_sys_prutokova_rovnice := pdsolve(sys_prutokova_rovnice, IBC, numeric, time = t, range
    = 0 .. L, spacestep =  $\frac{1}{20}$ , timestep =  $\frac{1}{20}$ );

p_q := prikaz_sys_prutokova_rovnice: -plot( $Q, x = \frac{L}{2}, t = 0..3.5, numpoints = 500$ );

p_qv := prikaz_sys_prutokova_rovnice: -value( $Q, x = \frac{L}{2}, t = 0..3.5$ );

i := 1000; p_qv(0);

A_m := array(0 .. i); for m to i do ( $p\_qv\left(\frac{m \cdot 5}{1000}\right)$ ), writedata( $fd, p\_qv\left(\frac{m \cdot 5}{1000}\right)$ , string, float) end;

```

2 Tlak – tlak, Hooke, silnostěnný

restart;

with(plots);

$$\rho nula := 998.2; f := 1.2875; Qnula := 0.00002475; r1nula := \frac{0.0127}{2}; r2nula := \frac{0.0159}{2}; L := 0.7;$$

$$g := 9.81; K := 2.1E9; E := 4E6; \lambda := 0.052; Snula := \pi \cdot r1nula \cdot r1nula; pvnejsi := 0; \mu := 0.5;$$

$$S(x, t) := \pi \cdot r1(x, t) \cdot r1(x, t); Kc(x, t) := \frac{K}{1 + \frac{2 \cdot K}{E} \cdot \left(\frac{r1(x, t)^2 + r2(x, t)^2}{r2(x, t)^2 - r1(x, t)^2} + 1 \cdot \mu \right)};$$

$$pvystup := \begin{cases} 102\,000.0 \cdot t, & t < 0.5; \\ 151\,000 + 32\,913,5195 \cdot \sin(1,2875 \cdot 2 \cdot \pi \cdot t + 2,24) - 100\,000, & t \geq 0.5; \end{cases}$$

$$pvstup := \begin{cases} 104\,200.0 \cdot t, & t < 0.5; \\ 157\,000 + 33\,500 \cdot \sin(1,2875 \cdot 2 \cdot \pi \cdot t + 2,24) - 100\,000, & t \geq 0.5; \end{cases}$$

$$R := \frac{\rho nula \cdot \lambda \cdot L}{2 \cdot r1nula} \cdot \frac{1}{2 \cdot Snula \cdot Snula}; Kcnula := \frac{K}{1 + \frac{2 \cdot K}{E} \cdot \left(\frac{r1nula^2 + r2nula^2}{r2nula^2 - r1nula^2} + 1 \cdot \mu \right)};$$

$$dpnula_t := \frac{\partial}{\partial t} \left(pvstup - \frac{\rho nula \cdot \lambda \cdot x}{2 \cdot r1nula} \cdot \frac{Qnula \cdot Qnula}{2 \cdot Snula \cdot Snula} + \rho nula \cdot g \cdot x \right) \Big|_{t=0};$$

$$d_r1nula_0_t := \frac{r1nula}{(r2nula^2 - r1nula^2) \cdot E} \cdot \left((r1nula^2 + r2nula^2 + \mu \cdot (r2nula^2 - r1nula^2)) \cdot pvstup|_{t=0} - 2 \cdot r2nula^2 \cdot pvnejsi \right) - \frac{r1nula \cdot (\mu - 1)}{E} \cdot pvnejsi;$$

$$d_r2nula_0_t := \frac{r2nula}{(r2nula^2 - r1nula^2) \cdot E} \cdot \left((2 \cdot r1nula^2 \cdot pvstup|_{t=0} - pvnejsi \cdot (r1nula^2 + r2nula^2 + \mu \cdot (r1nula^2 - r2nula^2))) \right) - \frac{r2nula \cdot (\mu - 1)}{E} \cdot pvnejsi;$$

$$d_l_nula_0_t := \frac{-2 \cdot L \cdot \mu}{(r2nula^2 - r1nula^2) \cdot E} \cdot (r1nula^2 \cdot pvstup|_{t=0} - r2nula^2 \cdot pvnejsi) - \frac{2 \cdot L \cdot \mu \cdot pvnejsi}{E};$$

$$d_Delka_L_0_t := \frac{2 \cdot L}{r2nula \cdot r2nula - r1nula \cdot r1nula} \cdot (r1nula \cdot d_r1nula_0_t - r2nula \cdot d_r2nula_0_t);$$

$$\sigma(x, t) := Km - \frac{Cm}{r^2}; \quad \sigma t(x, t) := Km + \frac{Cm}{r^2};$$

$$Km := \frac{p(x, t) \cdot r1nula^2 - pvnejsi \cdot r2nula^2}{r2(x, t)^2 - r1(x, t)^2}; \quad Cm := (p(x, t) - pvnejsi) \cdot \frac{r1nula^2 \cdot r2nula^2}{r2(x, t)^2 - r1(x, t)^2};$$

$$u1(x, t) := \frac{(1 - \mu)}{E} \cdot Km \cdot r1(x, t) + \frac{(1 + \mu)}{E} \cdot \frac{Cm}{r1(x, t)};$$

$$u2(x, t) := \frac{(1 - \mu)}{E} \cdot Km \cdot r2(x, t) + \frac{(1 + \mu)}{E} \cdot \frac{Cm}{r2(x, t)};$$

$$\sigma 1(x, t) := Km - \frac{Cm}{r1(x, t)^2}; \quad \sigma t 1(x, t) := Km + \frac{Cm}{r1(x, t)^2};$$

$$\sigma 2(x, t) := Km - \frac{Cm}{r2(x, t)^2}; \quad \sigma t 2(x, t) := Km + \frac{Cm}{r2(x, t)^2};$$

$$delka(x, t) := \left(\frac{(r2nula)^2 - (r1nula)^2}{(r2(x, t))^2 - (r1(x, t))^2} - 1 \right) \cdot L$$

$$declare(p(x, t), Q(x, t), r1(x, t), r2(x, t), l(x, t));$$

$$\begin{aligned} IBC &:= \{p(L, t) = pvstup + \rho nula \cdot g \cdot L, p(0, t) = pvstup, \\ &p(x, 0) = pvstup|_{t=0} - \frac{\rho nula \cdot \lambda \cdot x}{2 \cdot r1nula} \cdot \frac{Qnula \cdot Qnula}{2 \cdot Snula \cdot Snula} + \rho nula \cdot g \cdot x, Q(x, 0) \\ &= 0 \cdot Qnula, \\ &r1(x, 0) = r1nula + 0.0000325 + 0 \cdot d_r1nula_0_t, \quad r2(x, 0) \\ &= r2nula + 0.0000325 + 0 \cdot d_r2nula_0_t, l(x, 0) = L + 0 \cdot d_l_nula_0_t, \rho(x, 0) \\ &= \rho nula, Delka_L(x, 0) = L + 0 \cdot d_Delka_L_0_t\}; \end{aligned}$$

$$sys_prutokova_rovnice$$

$$\begin{aligned} &:= \left[\frac{\partial Q(x, t)}{\partial t} = \frac{S(x, t)}{\rho(x, t)} \cdot \left(-\frac{\partial p(x, t)}{\partial x} + \rho(x, t) \cdot g - \frac{\rho(x, t) \cdot \lambda}{2 \cdot r1(x, t)} \cdot \frac{Q(x, t) \cdot |Q(x, t)|}{2 \cdot S(x, t) \cdot S(x, t)} \right), \right. \\ &\frac{\partial p(x, t)}{\partial t} = -\frac{Kc(x, t)}{S(x, t)} \cdot \frac{\partial Q(x, t)}{\partial x}, \\ &\frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} = \frac{\rho(x, t)}{K} \cdot \frac{\partial p(x, t)}{\partial t}, \quad \frac{\partial r1(x, t)}{\partial t} \\ &= \frac{r1(x, t)}{(r2(x, t)^2 - r1(x, t)^2) \cdot E} \\ &\cdot \left(\frac{\partial p(x, t)}{\partial t} \cdot (r1(x, t)^2 + r2(x, t)^2 + \mu \cdot (r2(x, t)^2 - r1(x, t)^2)) - 2 \cdot r2(x, t)^2 \right. \\ &\cdot \left. \frac{\partial pvnejsi}{\partial t} \right), \frac{\partial r2(x, t)}{\partial t} \\ &= \frac{r2(x, t)}{(r2(x, t)^2 - r1(x, t)^2) \cdot E} \\ &\cdot \left(2 \cdot r1(x, t)^2 \cdot \frac{\partial p(x, t)}{\partial t} - (r1(x, t)^2 + r2(x, t)^2 + \mu \cdot (r1(x, t)^2 - r2(x, t)^2)) \right. \\ &\cdot \left. \frac{\partial pvnejsi}{\partial t} \right), \frac{\partial l(x, t)}{\partial t} \\ &= \frac{-2 \cdot l(x, t) \cdot \mu}{(r2(x, t)^2 - r1(x, t)^2) \cdot E} \cdot \left(\frac{\partial p(x, t)}{\partial t} \cdot r1(x, t)^2 - \frac{\partial pvnejsi}{\partial t} \cdot r2(x, t)^2 \right), \frac{\partial Delka_L(x, t)}{\partial t} \\ &= \frac{2 \cdot Delka_L(x, t)}{r2(x, t)^2 - r1(x, t)^2} \cdot \left(r1(x, t) \cdot \frac{\partial r1(x, t)}{\partial t} - r2(x, t) \cdot \frac{\partial r2(x, t)}{\partial t} \right) \Big]; \end{aligned}$$

$$fcns_sys_prutokova_rovnice := \{Q(x, t), p(x, t), r1(x, t), r2(x, t), l(x, t), \rho(x, t), Delka_L(x, t)\};$$

$$\begin{aligned} prikaz_sys_prutokova_rovnice &:= pdsolve(sys_prutokova_rovnice, IBC, numeric, time = t, range \\ &= 0 .. L, spacestep = \frac{1}{20}, timestep = \frac{1}{20}); \end{aligned}$$

$$p_q := prikaz_sys_prutokova_rovnice: -plot \left(Q, x = \frac{L}{2}, t = 0 .. 3.5, numpoints = 500 \right);$$

$$p_qv := prikaz_sys_prutokova_rovnice: -value(Q, x = \frac{L}{2}, t = 0 .. 3.5);$$

$$i := 1000; p_qv(0);$$

$$A_m := array(0 .. i); \textbf{for } m \textbf{ to } i \textbf{ do } \left(p_qv\left(\frac{m \cdot 5}{1000}\right) \right), \textbf{writedata} \left(fd, p_qv\left(\frac{m \cdot 5}{1000}\right) \right), \textbf{string}, \textbf{float} \textbf{ end};$$

3 Tlak – tlak, neo-Hooke, silnostěnný

restart;

with(plots);

$$\rho nula := 998.2; f := 1.2875; Qnula := 0.00002475; r1nula := \frac{0.0127}{2}; r2nula := \frac{0.0159}{2}; L := 0.7;$$

$$g := 9.81; K := 2.1E9; E := 4E6; \lambda := 0.052; Snula := \pi \cdot r1nula \cdot r1nula; pvnejsi := 0; \mu := 0.5;$$

$$Cmat := 0.65E6; S(x, t) := \pi \cdot r1(x, t) \cdot r1(x, t); R := \frac{\rho nula \cdot \lambda \cdot L}{2 \cdot r1nula} \cdot \frac{1}{2 \cdot Snula \cdot Snula};$$

$$pvystup := \begin{cases} 151\,000 + 32\,913,5195 \cdot \sin(1,2875 \cdot 2 \cdot \pi \cdot t + 2,24) - 100\,000, & t < 0.5 \\ 102\,000.0 \cdot t, & t \geq 0.5 \end{cases};$$

$$pvstup := \begin{cases} 104\,200.0 \cdot t, & t < 0.5 \\ 157\,000 + 33\,500 \cdot \sin(1,2875 \cdot 2 \cdot \pi \cdot t + 2,24) - 100\,000, & t \geq 0.5 \end{cases};$$

$$dpnula_t := \frac{\partial}{\partial t} \left(pvstup - \frac{\rho nula \cdot \lambda \cdot x}{2 \cdot r1nula} \cdot \frac{Qnula \cdot Qnula}{2 \cdot Snula \cdot Snula} + \rho nula \cdot g \cdot x \right) \Big|_{t=0};$$

$$\lambda a1(x, t) := 1; \lambda r1(x, t) := \frac{1}{\lambda t1(x, t)};$$

$$\sigma r1(x, t) := \sigma a1(x, t) + 2 \cdot Cmat \cdot (\lambda r1(x, t)^2 - \lambda a1(x, t)^2);$$

$$\sigma a1(x, t) := -p(x, t) - 2 \cdot Cmat \cdot (\lambda r1(x, t)^2 - \lambda a1(x, t)^2);$$

$$\sigma t1(x, t) := \sigma a1(x, t) + 2 \cdot Cmat \cdot (\lambda t1(x, t)^2 - \lambda a1(x, t)^2);$$

$$\lambda a2(x, t) := 1; \lambda r2(x, t) := \frac{1}{\lambda t2(x, t)};$$

$$\sigma r2(x, t) := \sigma a2(x, t) + 2 \cdot Cmat \cdot (\lambda r2(x, t)^2 - \lambda a2(x, t)^2);$$

$$\sigma a2(x, t) := 0 + 2 \cdot Cmat \cdot (\lambda a2(x, t)^2 - \lambda r2(x, t)^2);$$

$$\sigma t2(x, t) := \sigma a2(x, t) + 2 \cdot Cmat \cdot (\lambda t2(x, t)^2 - \lambda a2(x, t)^2);$$

$$\lambda t1(x, t) := \frac{r1(x, t)}{r1nula}; \lambda t2(x, t) := \frac{r2(x, t)}{r2nula};$$

$$r2 := \sqrt{r1(x, t) \cdot r1(x, t) + (r2nula \cdot r2nula - r1nula \cdot r1nula)};$$

$$\text{declare} \left(p(x, t), Q(x, t), r1(x, t), \rho(x, t), \frac{\partial r1}{\partial t}(x, t) \right);$$

$$Cmat12(x, t) := \text{piecewise}(x < 0.1, 2.05E11, x \geq 0.1 \text{ and } x \leq 0.6, 0.65E6, x > 0.6 \text{ and } x \leq 0.7, 2.05E11);$$

$$Ar(x, t) := \frac{1}{4 \cdot r1(x, t) \cdot Cmat \cdot \left(\frac{r1nula \cdot r1nula}{r1(x, t)^4} - \frac{r2nula \cdot r2nula}{r2(x, t)^4} \right)};$$

$$IBC := \{ p(L, t) = pvystup + \rho nula \cdot g \cdot L, p(0, t) = pvstup,$$

$$p(x, 0) = pvstup|_{t=0} - \frac{\rho nula \cdot \lambda \cdot x}{2 \cdot r1nula} \cdot \frac{Qnula \cdot Qnula}{2 \cdot Snula \cdot Snula} + \rho nula \cdot g \cdot x, Q(x, 0)$$

$$= 0 \cdot Qnula, \rho(x, 0) = \rho nula, r1(x, 0) = r1nula + 0.00001 \};$$

sys_prutokova_rovnice

$$\begin{aligned}
 &:= \left[\frac{\partial Q(x, t)}{\partial t} \right. \\
 &= \frac{2 \cdot Q(x, t)}{r1(x, t)} \cdot \frac{\partial r1(x, t)}{\partial t} + \frac{S(x, t)}{\rho(x, t)} \\
 &\cdot \left(-\frac{\partial p(x, t)}{\partial x} + \rho(x, t) \cdot g - \frac{\rho(x, t) \cdot \lambda}{2 \cdot r1(x, t)} \cdot \frac{Q(x, t) \cdot |Q(x, t)|}{2 \cdot S(x, t) \cdot S(x, t)} \right), \frac{\partial p(x, t)}{\partial t} \\
 &= -\frac{\frac{1}{S(x, t)} \cdot \frac{\partial Q(x, t)}{\partial x}}{\frac{1}{K} \cdot \frac{2 \cdot Ar(x, t)}{r1(x, t)}}, \frac{\partial p(x, t)}{\partial t} = \frac{\rho(x, t)}{K} \cdot \frac{\partial p(x, t)}{\partial t}, \frac{\partial r1(x, t)}{\partial t} = Ar(x, t) \cdot \frac{\partial p(x, t)}{\partial t} \left. \right];
 \end{aligned}$$

fcns_sys_prutokova_rovnice := { $Q(x, t), p(x, t), r1(x, t), \rho(x, t), \sigma a1(x, t)$ };

prikaz_sys_prutokova_rovnice := *pdsolve*(*sys_prutokova_rovnice*, *IBC*, *numeric*, *time* = *t*, *range* = $0 \dots L$, *spacestep* = $\frac{1}{20}$, *timestep* = $\frac{1}{20}$);

p_q := *prikaz_sys_prutokova_rovnice*: -*plot* ($Q, x = \frac{L}{2}, t = 0 \dots 3.5, \text{numpoints} = 500$);

p_qv := *prikaz_sys_prutokova_rovnice*: -*value*($Q, x = \frac{L}{2}, t = 0 \dots 3.5$);

i := 1000; *p_qv*(0);

A_m := *array*($0 \dots i$); **for** *m* **to** *i* **do** (*p_qv*($\frac{m \cdot 5}{1000}$)), *writedata* (*fd*, *p_qv*($\frac{m \cdot 5}{1000}$)), *string*, *float*) **end**;

4 Tlak – tlak, Mooney-Rivlin, silnostěnný

restart;

with(plots);

$$\begin{aligned}
 \rho nula &:= 998.2; f := 1.2875; Qnula := 0.00002475; r1nula := \frac{0.0127}{2}; r2nula := \frac{0.0159}{2}; L := 0.7; \\
 g &:= 9.81; K := 2.1E9; E := 4E6; \lambda := 0.052; Snula := \pi \cdot r1nula \cdot r1nula; pvnejsi := 0; \mu := 0.5; \\
 Cmat1 &:= 0.60E6; Cmat2 := 0.05E6; S(x, t) := \pi \cdot r1(x, t) \cdot r1(x, t); R := \frac{\rho nula \cdot \lambda \cdot L}{2 \cdot r1nula} \cdot \frac{1}{2 \cdot Snula \cdot Snula}; \\
 pvystup &:= \begin{cases} 102\,000.0 \cdot t, & t < 0.5; \\ 151\,000 + 32\,913,5195 \cdot \sin(1,2875 \cdot 2 \cdot \pi \cdot t + 2,24) - 100\,000, & t \geq 0.5; \end{cases} \\
 pvstup &:= \begin{cases} 104\,200.0 \cdot t, & t < 0.5; \\ 157\,000 + 33\,500 \cdot \sin(1,2875 \cdot 2 \cdot \pi \cdot t + 2,24) - 100\,000, & t \geq 0.5; \end{cases} \\
 dpnula_t &:= \frac{\partial}{\partial t} \left(pvstup - \frac{\rho nula \cdot \lambda \cdot x}{2 \cdot r1nula} \cdot \frac{Qnula \cdot Qnula}{2 \cdot Snula \cdot Snula} + \rho nula \cdot g \cdot x \right) \Big|_{t=0}; \\
 \lambda a1(x, t) &:= 1; \lambda r1(x, t) := \frac{1}{\lambda t1(x, t)}; \\
 \sigma r1(x, t) &:= \sigma a1(x, t) + 2 \cdot Cmat1 \cdot (\lambda r1(x, t)^2 - \lambda a1(x, t)^2) - 2 \cdot Cmat2 \cdot \left(\frac{1}{\lambda r1(x, t)^2} - \frac{1}{\lambda a1(x, t)^2} \right); \\
 \sigma a1(x, t) &:= -p(x, t) - 2 \cdot Cmat1 \cdot (\lambda r1(x, t)^2 - \lambda a1(x, t)^2) + 2 \cdot Cmat2 \cdot \left(\frac{1}{\lambda r1(x, t)^2} - \frac{1}{\lambda a1(x, t)^2} \right); \\
 \sigma t1(x, t) &:= \sigma a1(x, t) + 2 \cdot Cmat1 \cdot (\lambda t1(x, t)^2 - \lambda a1(x, t)^2) - 2 \cdot Cmat2 \cdot \left(\frac{1}{\lambda t1(x, t)^2} - \frac{1}{\lambda a1(x, t)^2} \right); \\
 \lambda a2(x, t) &:= 1; \lambda r2(x, t) := \frac{1}{\lambda t2(x, t)}; \\
 \sigma r2(x, t) &:= \sigma a2(x, t) + 2 \cdot Cmat1 \cdot (\lambda r2(x, t)^2 - \lambda a2(x, t)^2) - 2 \cdot Cmat2 \cdot \left(\frac{1}{\lambda r2(x, t)^2} - \frac{1}{\lambda a2(x, t)^2} \right); \\
 \sigma a2(x, t) &:= 0 + 2 \cdot Cmat1 \cdot (\lambda a2(x, t)^2 - \lambda r2(x, t)^2) + 2 \cdot Cmat2 \cdot \left(\frac{1}{\lambda r2(x, t)^2} - \frac{1}{\lambda a2(x, t)^2} \right); \\
 \sigma t2(x, t) &:= \sigma a2(x, t) + 2 \cdot Cmat1 \cdot (\lambda t2(x, t)^2 - \lambda a2(x, t)^2) - 2 \cdot Cmat2 \cdot \left(\frac{1}{\lambda t2(x, t)^2} - \frac{1}{\lambda a2(x, t)^2} \right); \\
 \lambda t1(x, t) &:= \frac{r1(x, t)}{r1nula}; \lambda t2(x, t) := \frac{r2(x, t)}{r2nula}; \\
 r2 &:= \left| \sqrt{r1(x, t) \cdot r1(x, t) + (r2nula \cdot r2nula - r1nula \cdot r1nula)} \right|; \\
 declare &(p(x, t), Q(x, t), r1(x, t), r2(x, t)); \\
 IBC &:= \left\{ p(L, t) = pvystup + \rho nula \cdot g \cdot L, p(0, t) = pvstup, \right. \\
 &\quad p(x, 0) = pvstup|_{t=0} - \frac{\rho nula \cdot \lambda \cdot x}{2 \cdot r1nula} \cdot \frac{Qnula \cdot Qnula}{2 \cdot Snula \cdot Snula} + \rho nula \cdot g \cdot x, Q(x, 0) \\
 &\quad \left. = 0 \cdot Qnula, \rho(x, 0) = \rho nula, r1(x, 0) = r1nula + 0.00001 \right\};
 \end{aligned}$$

sys_prutokova_rovnice

$$\begin{aligned}
 &:= \left[\begin{aligned} &\frac{\partial Q(x,t)}{\partial t} \\ &= \frac{2 \cdot Q(x,t)}{r1(x,t)} \cdot \frac{\partial r1(x,t)}{\partial t} + \frac{S(x,t)}{\rho(x,t)} \cdot \left(-\frac{\partial p(x,t)}{\partial x} + \rho(x,t) \cdot g - \frac{\rho(x,t) \cdot \lambda}{2 \cdot r1(x,t)} \cdot \frac{Q(x,t) \cdot |Q(x,t)|}{2 \cdot S(x,t) \cdot S(x,t)} \right), \frac{\partial p(x,t)}{\partial t} \\ &= -\frac{\frac{1}{S(x,t)} \cdot \frac{\partial Q(x,t)}{\partial x}}{\frac{1}{K} + \frac{1}{2 \cdot r1(x,t) \cdot r1(x,t) \cdot \left(Cmat1 \cdot \left(\frac{r1nula^2}{r1(x,t)^4} - \frac{r2nula^2}{r2(x,t)^4} \right) + Cmat2 \cdot \left(\frac{1}{r1nula^2} - \frac{1}{r2nula^2} \right) \right)}}, \\ &\frac{\partial \rho(x,t)}{\partial t} = \frac{\rho(x,t)}{K} \cdot \frac{\partial p(x,t)}{\partial t}, \\ &\frac{\partial r1(x,t)}{\partial t} = \frac{\frac{\partial p(x,t)}{\partial t}}{4 \cdot r1(x,t) \cdot \left(Cmat1 \cdot \left(\frac{r1nula^2}{r1(x,t)^4} - \frac{r2nula^2}{r2(x,t)^4} \right) + Cmat2 \cdot \left(\frac{1}{r1nula^2} - \frac{1}{r2nula^2} \right) \right)} \end{aligned} \right];
 \end{aligned}$$

fcns_sys_prutokova_rovnice := {*Q(x,t), p(x,t), r1(x,t), ρ(x,t), u1(x,t), λt1(x,t)* };

prikaz_sys_prutokova_rovnice := *pdsolve(sys_prutokova_rovnice, IBC, numeric, time = t, range*
 $= 0 \dots L, \text{spacestep} = \frac{1}{20}, \text{timestep} = \frac{1}{20}$);

p_q := *prikaz_sys_prutokova_rovnice*: -*plot* $\left(Q, x = \frac{L}{2}, t = 0 \dots 3.5, \text{numpoints} = 500 \right)$;

p_qv := *prikaz_sys_prutokova_rovnice*: -*value* $\left(Q, x = \frac{L}{2}, t = 0 \dots 3.5 \right)$;

i := 1000; *p_qv*(0);

A_m := *array*(0 .. *i*); **for** *m* **to** *i* **do** $\left(p_qv\left(\frac{m \cdot 5}{1000}\right) \right)$, *writedata* $\left(fd, p_qv\left(\frac{m \cdot 5}{1000}\right) \right)$, *string*, *float*) **end**;

5 Průtok – tlak, Hooke, tenkostěnný

restart;

with(plots);

$\rho := 998.2; f := 1.2875; Qnula := 0.00002475; dnula := 0.0127; snula := 0.0016; Lnula := 0.7; L := 0.7;$

$g := 9.81; K := 2.1E9; E := 4E6; \lambda := 0.052; Snula := \frac{\pi \cdot dnula \cdot dnula}{4}; pvnejsi := 100000; \mu := 0.5;$

$S(x, t) := \frac{\pi \cdot d(x, t) \cdot d(x, t)}{4};$

$pvystup := \begin{cases} 102\,000.0 \cdot t, & t < 0.5; \\ 151\,000 + 32\,913,5195 \cdot \sin(1,2875 \cdot 2 \cdot \pi \cdot t + 2,24) - 100\,000, & t \geq 0.5; \end{cases}$

$pvstup := \begin{cases} 104\,200.0 \cdot t, & t < 0.5; \\ 157\,000 + 33\,500 \cdot \sin(1,2875 \cdot 2 \cdot \pi \cdot t + 2,24) - 100\,000, & t \geq 0.5; \end{cases}$

$Qvstup := \begin{cases} (1/5) \cdot (0.0000245 + 0.00000275 \cdot |(\sin(3.55 \cdot 0.11))|) \cdot (1 + 8 \cdot t), & t < 0.5; \\ 0.0000245 + 0.00000275 \cdot |(\sin(\pi \cdot f \cdot t + 3.55 \cdot 0.11))|, & t \geq 0.5; \end{cases}$

$R := \frac{\rho \cdot \lambda \cdot L}{dnula} \cdot \frac{1}{2 \cdot Snula \cdot Snula}; pnula_t := pvstup - \frac{\rho \cdot \lambda \cdot L}{dnula} \cdot \frac{Qnula \cdot Qnula}{2 \cdot Snula \cdot Snula} + \rho \cdot g \cdot x \Big|_{t=0};$

$dpnula_t := \frac{\partial}{\partial t} \left(pvstup - \frac{\rho \cdot \lambda \cdot L}{dnula} \cdot \frac{Qnula \cdot Qnula}{2 \cdot Snula \cdot Snula} + \rho \cdot g \cdot x \right) \Big|_{t=0};$

$dnula_0_t := \frac{dnula \cdot dnula}{2 \cdot E \cdot snula} \cdot pnula_t;$

$snula_0_t := \frac{dnula}{2 \cdot E \cdot (dnula + 2 \cdot snula)} \cdot (dnula \cdot (\mu - 1) + snula \cdot \mu) \cdot pnula_t;$

$dLnula_0_t := \frac{-Lnula}{E} \cdot \mu \cdot \frac{dnula}{2 \cdot snula} \cdot pnula_t;$

$\sigma(x, t) := \frac{p(x, t) \cdot d(x, t)}{2 \cdot s(x, t)}; l(x, t) := \left(\frac{(dnula + 2 \cdot snula)^2 - dnula \cdot dnula}{(d(x, t) + 2 \cdot s(x, t))^2 - d(x, t) \cdot d(x, t)} - 1 \right) \cdot Lnula;$

declare($p(x, t), Q(x, t), d(x, t)$);

$IBC := \{p(L, t) = pvystup + \rho \cdot g \cdot L, Q(0, t) = Qvstup,$

$p(x, 0) = pvstup|_{t=0} - \frac{\rho \cdot \lambda \cdot x}{dnula} \cdot \frac{Qnula \cdot Qnula}{2 \cdot Snula \cdot Snula} + \rho \cdot g \cdot x, Q(x, 0) = 0 \cdot Qnula,$

$d(x, 0) = dnula + 0 \cdot dnula_0_t, s(x, 0) = snula + 0 \cdot snula_0_t,$

$delka(x, 0) = Lnula + 0 \cdot dLnula_0_t\}$;

sys_prutokova_rovnice

$$\begin{aligned} &:= \left[\frac{\partial Q(x, t)}{\partial t} \right. \\ &= \frac{Q(x, t) \cdot d(x, t)}{E \cdot s(x, t)} \cdot \frac{\partial p(x, t)}{\partial t} + \frac{S(x, t)}{\rho} \cdot \left(-\frac{\partial p(x, t)}{\partial x} + \rho \cdot g - \frac{\rho \cdot \lambda}{d(x, t)} \cdot \frac{Q(x, t) \cdot |Q(x, t)|}{2 \cdot S(x, t) \cdot S(x, t)} \right), \\ &\frac{\partial p(x, t)}{\partial t} = -\frac{Kc(x, t)}{S(x, t)} \cdot \left(\frac{\partial Q(x, t)}{\partial x} - \frac{Q(x, t) \cdot d(x, t)}{E \cdot s(x, t)} \cdot \frac{\partial p(x, t)}{\partial x} \right), \frac{\partial d(x, t)}{\partial t} \\ &= \frac{d(x, t) \cdot d(x, t)}{2 \cdot E \cdot s(x, t)} \cdot (1 - \mu^2) \cdot \frac{\partial p(x, t)}{\partial t}, \frac{\partial s(x, t)}{\partial t} \\ &= -\frac{s(x, t)}{d(x, t) + 2 \cdot s(x, t)} \cdot \frac{\partial d(x, t)}{\partial t}, \frac{\partial delka(x, t)}{\partial t} = \frac{-delka(x, t)}{E} \cdot \frac{\mu \cdot d(x, t)}{2 \cdot s(x, t)} \cdot \frac{\partial p(x, t)}{\partial t} \Big]; \end{aligned}$$

fcons_sys_prutokova_rovnice := { $Q(x, t), p(x, t), d(x, t), s(x, t), delka(x, t)$ };

```

prikaz_sys_prutokova_rovnice := pdsolve(sys_prutokova_rovnice,IBC,numeric,time = t,range
    = 0 .. L,spacestep =  $\frac{1}{20}$ ,timestep =  $\frac{1}{20}$ );

p_q := prikaz_sys_prutokova_rovnice:-plot( $Q, x = \frac{L}{2}, t = 0..3.5, numpoints = 500$ );

p_qv := prikaz_sys_prutokova_rovnice:-value( $Q, x = \frac{L}{2}, t = 0..3.5$ );

i := 1000; p_qv(0);

A_m := array(0 .. i); for m to i do ( $p\_qv\left(\frac{m \cdot 5}{1000}\right)$ ),writedata( $fd, p\_qv\left(\frac{m \cdot 5}{1000}\right)$ ,string,float) end;

```

6 Průtok – tlak, Hooke, silnostěnný

restart;

with(plots);

$$\rho nula := 998.2; f := 1.2875; Qnula := 0.00002475; r1nula := \frac{0.0127}{2}; r2nula := \frac{0.0159}{2}; L := 0.7;$$

$$g := 9.81; K := 2.1E9; E := 4E6; \lambda := 0.052; Snula := \pi \cdot r1nula \cdot r1nula; pvnejsi := 0; \mu := 0.5;$$

$$S(x, t) := \pi \cdot r1(x, t) \cdot r1(x, t); Kc(x, t) := \frac{K}{1 + \frac{2 \cdot K}{E} \cdot \left(\frac{r1(x, t)^2 + r2(x, t)^2}{r2(x, t)^2 - r1(x, t)^2} + 1 \cdot \mu \right)};$$

$$pvystup := \begin{cases} 102\,000.0 \cdot t, & t < 0.5; \\ 151\,000 + 32\,913,5195 \cdot \sin(1,2875 \cdot 2 \cdot \pi \cdot t + 2,24) - 100\,000, & t \geq 0.5; \end{cases}$$

$$pvstup := \begin{cases} 104\,200.0 \cdot t, & t < 0.5; \\ 157\,000 + 33\,500 \cdot \sin(1,2875 \cdot 2 \cdot \pi \cdot t + 2,24) - 100\,000, & t \geq 0.5; \end{cases}$$

$$Qvstup := \begin{cases} \frac{2.55468E - 05 \cdot t}{0.5}, & t < 0.5; \\ 0.0000245 + 0.00000275 \cdot |(\sin(\pi \cdot f \cdot t + 3.55 \cdot 0.11))|, & t \geq 0.5 \end{cases}$$

$$R := \frac{\rho nula \cdot \lambda \cdot L}{2 \cdot r1nula} \cdot \frac{1}{2 \cdot Snula \cdot Snula}; Kcnula := \frac{K}{1 + \frac{2 \cdot K}{E} \cdot \left(\frac{r1nula^2 + r2nula^2}{r2nula^2 - r1nula^2} + 1 \cdot \mu \right)};$$

$$dpnula_t := \frac{\partial}{\partial t} \left(pvstup - \frac{\rho nula \cdot \lambda \cdot x}{2 \cdot r1nula} \cdot \frac{Qnula \cdot Qnula}{2 \cdot Snula \cdot Snula} + \rho nula \cdot g \cdot x \right) \Big|_{t=0};$$

$$d_r1nula_0_t := \frac{r1nula}{(r2nula^2 - r1nula^2) \cdot E} \cdot \left((r1nula^2 + r2nula^2 + \mu \cdot (r2nula^2 - r1nula^2)) \cdot pvstup|_{t=0} - 2 \cdot r2nula^2 \cdot pvnejsi \right) - \frac{r1nula \cdot (\mu - 1)}{E} \cdot pvnejsi;$$

$$d_r2nula_0_t := \frac{r2nula}{(r2nula^2 - r1nula^2) \cdot E} \cdot \left(2 \cdot r1nula^2 \cdot pvstup|_{t=0} - pvnejsi \cdot (r1nula^2 + r2nula^2 + \mu \cdot (r1nula^2 - r2nula^2)) \right) - \frac{r2nula \cdot (\mu - 1)}{E} \cdot pvnejsi;$$

$$d_l_nula_0_t := \frac{-2 \cdot L \cdot \mu}{(r2nula^2 - r1nula^2) \cdot E} \cdot (r1nula^2 \cdot pvstup|_{t=0} - r2nula^2 \cdot pvnejsi) - \frac{2 \cdot L \cdot \mu \cdot pvnejsi}{E};$$

$$d_Delka_L_0_t := \frac{2 \cdot L}{r2nula \cdot r2nula - r1nula \cdot r1nula} \cdot (r1nula \cdot d_r1nula_0_t - r2nula \cdot d_r2nula_0_t);$$

$$\sigma(x, t) := Km - \frac{Cm}{r^2}; \quad \sigma t(x, t) := Km + \frac{Cm}{r^2};$$

$$Km := \frac{p(x, t) \cdot r1nula^2 - pvnejsi \cdot r2nula^2}{r2(x, t)^2 - r1(x, t)^2}; Cm := (p(x, t) - pvnejsi) \cdot \frac{r1nula^2 \cdot r2nula^2}{r2(x, t)^2 - r1(x, t)^2};$$

$$u1(x, t) := \frac{(1 - \mu)}{E} \cdot Km \cdot r1(x, t) + \frac{(1 + \mu)}{E} \cdot \frac{Cm}{r1(x, t)};$$

$$u2(x, t) := \frac{(1 - \mu)}{E} \cdot Km \cdot r2(x, t) + \frac{(1 + \mu)}{E} \cdot \frac{Cm}{r2(x, t)};$$

$$\sigma r1(x, t) := Km - \frac{Cm}{r1(x, t)^2}; \quad \sigma t1(x, t) := Km + \frac{Cm}{r1(x, t)^2};$$

$$\sigma r2(x, t) := Km - \frac{Cm}{r2(x, t)^2}; \quad \sigma t2(x, t) := Km + \frac{Cm}{r2(x, t)^2};$$

$$delka(x, t) := \left(\frac{(r2nula)^2 - (r1nula)^2}{(r2(x, t))^2 - (r1(x, t))^2} - 1 \right) \cdot L$$

$$declare(p(x, t), Q(x, t), r1(x, t), r2(x, t), l(x, t));$$

$$IBC := \left\{ p(L, t) = pvystup + \rho nula \cdot g \cdot L, Q(0, t) = Qvstup, \right.$$

$$\begin{aligned} p(x, 0) &= pvstup|_{t=0} - \frac{\rho nula \cdot \lambda \cdot x}{2 \cdot r1nula} \cdot \frac{Qnula \cdot Qnula}{2 \cdot Snula \cdot Snula} + \rho nula \cdot g \cdot x, Q(x, 0) \\ &= 0 \cdot Qnula, \\ r1(x, 0) &= r1nula + 0.00001 + 0 \cdot d_r1nula_0_t, \quad r2(x, 0) \\ &= r2nula + 0.00001 + 0 \cdot d_r2nula_0_t, \rho(x, 0) = \rho nula \Big\}; \end{aligned}$$

$$sys_prutokova_rovnice$$

$$\begin{aligned} &:= \left[\frac{\partial Q(x, t)}{\partial t} = \frac{S(x, t)}{\rho(x, t)} \cdot \left(-\frac{\partial p(x, t)}{\partial x} + \rho(x, t) \cdot g - \frac{\rho(x, t) \cdot \lambda}{2 \cdot r1(x, t)} \cdot \frac{Q(x, t) \cdot |Q(x, t)|}{2 \cdot S(x, t) \cdot S(x, t)} \right), \right. \\ &\quad \frac{\partial p(x, t)}{\partial t} = -\frac{Kc(x, t)}{S(x, t)} \cdot \frac{\partial Q(x, t)}{\partial x}, \\ &\quad \frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} = \frac{\rho(x, t)}{K} \cdot \frac{\partial p(x, t)}{\partial t}, \quad \frac{\partial r1(x, t)}{\partial t} \\ &= \frac{r1(x, t)}{(r2(x, t)^2 - r1(x, t)^2) \cdot E} \\ &\quad \cdot \left(\frac{\partial p(x, t)}{\partial t} \cdot (r1(x, t)^2 + r2(x, t)^2 + \mu \cdot (r2(x, t)^2 - r1(x, t)^2)) - 2 \cdot r2(x, t)^2 \cdot \frac{\partial p_{vnejsi}}{\partial t} \right) \\ &\quad - \frac{\mu \cdot r1(x, t)}{E} \cdot \frac{\mu \cdot r1(x, t) \cdot r1(x, t)}{r2(x, t)^2 - r1(x, t)^2} \cdot \frac{\partial p(x, t)}{\partial t}, \quad \frac{\partial r2(x, t)}{\partial t} \\ &= \frac{r2(x, t)}{(r2(x, t)^2 - r1(x, t)^2) \cdot E} \\ &\quad \cdot \left(2 \cdot r1(x, t)^2 \cdot \frac{\partial p(x, t)}{\partial t} - (r1(x, t)^2 + r2(x, t)^2 + \mu \cdot (r1(x, t)^2 - r2(x, t)^2)) \cdot \frac{\partial p_{vnejsi}}{\partial t} \right) \\ &\quad \left. - \frac{\mu \cdot r2(x, t)}{E} \cdot \frac{\mu \cdot r1(x, t) \cdot r1(x, t)}{r2(x, t)^2 - r1(x, t)^2} \cdot \frac{\partial p(x, t)}{\partial t} \right]; \end{aligned}$$

$$fcns_sys_prutokova_rovnice := \{Q(x, t), p(x, t), r1(x, t), r2(x, t), l(x, t), \rho(x, t), Delka_L(x, t)\};$$

$$\begin{aligned} prikaz_sys_prutokova_rovnice &:= pdsolve(sys_prutokova_rovnice, IBC, numeric, time = t, range \\ &= 0 \dots L, spacestep = \frac{1}{20}, timestep = \frac{1}{20}); \end{aligned}$$

$$p_q := prikaz_sys_prutokova_rovnice: -plot \left(Q, x = \frac{L}{2}, t = 0 \dots 3.5, numpoints = 500 \right);$$

$$p_qv := prikaz_sys_prutokova_rovnice: -value(Q, x = \frac{L}{2}, t = 0 \dots 3.5);$$

$$i := 1000; p_qv(0);$$

$$A_m := array(0 \dots i); \textbf{for } m \textbf{ to } i \textbf{ do } \left(p_qv\left(\frac{m \cdot 5}{1000}\right) \right), writedata \left(fd, p_qv\left(\frac{m \cdot 5}{1000}\right) \right), string, float) \textbf{end};$$

7 Průtok – tlak, neo-Hooke, silnostěnný

restart;

with(plots);

$$\rho nula := 998.2; f := 1.2875; Qnula := 0.00002475; r1nula := \frac{0.0127}{2}; r2nula := \frac{0.0159}{2}; L := 0.7;$$

$$g := 9.81; K := 2.1E9; E := 4E6; \lambda := 0.052; Snula := \pi \cdot r1nula \cdot r1nula; pvnejsi := 0; \mu := 0.5;$$

$$Cmat := 0.65E6; S(x, t) := \pi \cdot r1(x, t) \cdot r1(x, t); R := \frac{\rho nula \cdot \lambda \cdot L}{2 \cdot r1nula} \cdot \frac{1}{2 \cdot Snula \cdot Snula};$$

$$pvystup := \begin{cases} 151\,000 + 32\,913,5195 \cdot \sin(1,2875 \cdot 2 \cdot \pi \cdot t + 2,24) - 100\,000, & t < 0.5; \\ 102\,000.0 \cdot t, & t \geq 0.5; \end{cases}$$

$$pvstup := \begin{cases} 104\,200.0 \cdot t, & t < 0.5; \\ 157\,000 + 33\,500 \cdot \sin(1,2875 \cdot 2 \cdot \pi \cdot t + 2,24) - 100\,000, & t \geq 0.5; \end{cases}$$

$$Qvstup1 := \begin{cases} (1/5) \cdot (0.0000245 + 0.00000275 \cdot |(\sin(3.55 \cdot 0.11))|) \cdot (1 + 8 \cdot t), & t < 0.5; \\ 0.0000245 + 0.00000275 \cdot |(\sin(\pi \cdot f \cdot t + 3.55 \cdot 0.11))|, & t \geq 0.5; \end{cases}$$

$$Qvstup := \begin{cases} \frac{2.55468E - 05 \cdot t}{0.5}, & t < 0.5; \\ 0.0000245 + 0.00000275 \cdot |(\sin(\pi \cdot f \cdot t + 3.55 \cdot 0.11))|, & t \geq 0.5; \end{cases}$$

$$dpnula_t := \frac{\partial}{\partial t} \left(pvstup - \frac{\rho nula \cdot \lambda \cdot x}{2 \cdot r1nula} \cdot \frac{Qnula \cdot Qnula}{2 \cdot Snula \cdot Snula} + \rho nula \cdot g \cdot x \right) \Big|_{t=0};$$

$$\lambda a1(x, t) := 1; \lambda r1(x, t) := \frac{1}{\lambda t1(x, t)};$$

$$\sigma r1(x, t) := \sigma a1(x, t) + 2 \cdot Cmat \cdot (\lambda r1(x, t)^2 - \lambda a1(x, t)^2);$$

$$\sigma a1(x, t) := -p(x, t) - 2 \cdot Cmat \cdot (\lambda r1(x, t)^2 - \lambda a1(x, t)^2);$$

$$\sigma t1(x, t) := \sigma a1(x, t) + 2 \cdot Cmat \cdot (\lambda t1(x, t)^2 - \lambda a1(x, t)^2);$$

$$\lambda a2(x, t) := 1; \lambda r2(x, t) := \frac{1}{\lambda t2(x, t)};$$

$$\sigma r2(x, t) := \sigma a2(x, t) + 2 \cdot Cmat \cdot (\lambda r2(x, t)^2 - \lambda a2(x, t)^2);$$

$$\sigma a2(x, t) := 0 + 2 \cdot Cmat \cdot (\lambda a2(x, t)^2 - \lambda r2(x, t)^2);$$

$$\sigma t2(x, t) := \sigma a2(x, t) + 2 \cdot Cmat \cdot (\lambda t2(x, t)^2 - \lambda a2(x, t)^2);$$

$$\lambda t1(x, t) := \frac{r1(x, t)}{r1nula}; \lambda t2(x, t) := \frac{r2(x, t)}{r2nula};$$

$$r2 := \left| \sqrt{r1(x, t) \cdot r1(x, t) + (r2nula \cdot r2nula - r1nula \cdot r1nula)} \right|;$$

declare(p(x, t), Q(x, t), r1(x, t), p(x, t));

$$IBC := \left\{ p(L, t) = pvstup + \rho nula \cdot g \cdot L, Q(0, t) = Qvstup, \right.$$

$$\left. \begin{aligned} p(x, 0) &= pvstup|_{t=0} - \frac{\rho nula \cdot \lambda \cdot x}{2 \cdot r1nula} \cdot \frac{Qnula \cdot Qnula}{2 \cdot Snula \cdot Snula} + \rho nula \cdot g \cdot x, Q(x, 0) \\ &= 0 \cdot Qnula, \rho(x, 0) = \rho nula, r1(x, 0) = r1nula + 0.00001 \end{aligned} \right\};$$

sys_prutokova_rovnice

$$\begin{aligned}
 &:= \left[\frac{\partial Q(x,t)}{\partial t} \right. \\
 &= \frac{2 \cdot Q(x,t)}{r1(x,t)} \cdot \frac{\partial r1(x,t)}{\partial t} + \frac{S(x,t)}{\rho(x,t)} \\
 &\cdot \left(-\frac{\partial p(x,t)}{\partial x} + \rho(x,t) \cdot g - \frac{\rho(x,t) \cdot \lambda}{2 \cdot r1(x,t)} \cdot \frac{Q(x,t) \cdot |Q(x,t)|}{2 \cdot S(x,t) \cdot S(x,t)} \right), \frac{\partial p(x,t)}{\partial t} \\
 &= -\frac{\frac{1}{S(x,t)} \cdot \frac{\partial Q(x,t)}{\partial x}}{\frac{1}{K} \cdot \frac{1}{2 \cdot r1(x,t) \cdot r1(x,t) \cdot Cmat \cdot \left(\frac{r1nula \cdot r1nula}{r1(x,t)^4} - \frac{r2nula \cdot r2nula}{r2(x,t)^4} \right)}}, \frac{\partial p(x,t)}{\partial t} \\
 &= \frac{\rho(x,t)}{K} \cdot \frac{\partial p(x,t)}{\partial t}, \frac{\partial r1(x,t)}{\partial t} \\
 &= \left. \frac{1}{4 \cdot r1(x,t) \cdot Cmat \cdot \left(\frac{r1nula \cdot r1nula}{r1(x,t)^4} - \frac{r2nula \cdot r2nula}{r2(x,t)^4} \right)} \cdot \frac{\partial p(x,t)}{\partial t} \right];
 \end{aligned}$$

fcns_sys_prutokova_rovnice := {*Q(x,t), p(x,t), r1(x,t), ρ(x,t)* };

prikaz_sys_prutokova_rovnice := *pdsolve(sys_prutokova_rovnice, IBC, numeric, time = t, range*
= 0 .. L, spacestep = $\frac{1}{20}$, timestep = $\frac{1}{20}$);

p_q := *prikaz_sys_prutokova_rovnice*: -*plot* $\left(Q, x = \frac{L}{2}, t = 0..3.5, numpoints = 500 \right)$;

p_qv := *prikaz_sys_prutokova_rovnice*: -*value* $\left(Q, x = \frac{L}{2}, t = 0..3.5 \right)$;

i := 1000; *p_qv*(0);

A_m := *array*(0 .. *i*); **for** *m* **to** *i* **do** $\left(p_{qv} \left(\frac{m \cdot 5}{1000} \right) \right)$, *writedata* $\left(fd, p_{qv} \left(\frac{m \cdot 5}{1000} \right) \right)$, *string*, *float*) **end**;

8 Průtok – tlak, Mooney-Rivlin, silnostěnný

restart;

with(plots);

$$\begin{aligned} \rho nula &:= 998.2; f := 1.2875; Qnula := 0.00002475; r1nula := \frac{0.0127}{2}; r2nula := \frac{0.0159}{2}; L := 0.7; \\ g &:= 9.81; K := 2.1E9; E := 4E6; \lambda := 0.052; Snula := \pi \cdot r1nula \cdot r1nula; pvnejsi := 0; \mu := 0.5; \\ Cmat1 &:= 0.60E6; Cmat2 := 0.05E6; S(x, t) := \pi \cdot r1(x, t) \cdot r1(x, t); R := \frac{\rho nula \cdot \lambda \cdot L}{2 \cdot r1nula} \cdot \frac{1}{2 \cdot Snula \cdot Snula}; \\ pvystup &:= \begin{cases} 102\,000.0 \cdot t, & t < 0.5; \\ 151\,000 + 32\,913,5195 \cdot \sin(1,2875 \cdot 2 \cdot \pi \cdot t + 2,24) - 100\,000, & t \geq 0.5; \end{cases} \end{aligned}$$

$$pvstup := \begin{cases} 104\,200.0 \cdot t, & t < 0.5; \\ 157\,000 + 33\,500 \cdot \sin(1,2875 \cdot 2 \cdot \pi \cdot t + 2,24) - 100\,000, & t \geq 0.5; \end{cases}$$

$$Qvstup := \begin{cases} \frac{2.55468E - 05 \cdot t}{0.5}, & t < 0.5; \\ 0.0000245 + 0.00000275 \cdot |(\sin(\pi \cdot f \cdot t + 3.55 \cdot 0.11))|, & t \geq 0.5 \end{cases}$$

$$dpnula_t := \frac{\partial}{\partial t} \left(pvstup - \frac{\rho nula \cdot \lambda \cdot x}{2 \cdot r1nula} \cdot \frac{Qnula \cdot Qnula}{2 \cdot Snula \cdot Snula} + \rho nula \cdot g \cdot x \right) \Big|_{t=0};$$

$$\lambda a1(x, t) := 1; \lambda r1(x, t) := \frac{1}{\lambda t1(x, t)};$$

$$\sigma r1(x, t) := \sigma a1(x, t) + 2 \cdot Cmat1 \cdot (\lambda r1(x, t)^2 - \lambda a1(x, t)^2) - 2 \cdot Cmat2 \cdot \left(\frac{1}{\lambda r1(x, t)^2} - \frac{1}{\lambda a1(x, t)^2} \right);$$

$$\sigma a1(x, t) := -p(x, t) - 2 \cdot Cmat1 \cdot (\lambda r1(x, t)^2 - \lambda a1(x, t)^2) + 2 \cdot Cmat2 \cdot \left(\frac{1}{\lambda r1(x, t)^2} - \frac{1}{\lambda a1(x, t)^2} \right);$$

$$\sigma t1(x, t) := \sigma a1(x, t) + 2 \cdot Cmat1 \cdot (\lambda t1(x, t)^2 - \lambda a1(x, t)^2) - 2 \cdot Cmat2 \cdot \left(\frac{1}{\lambda t1(x, t)^2} - \frac{1}{\lambda a1(x, t)^2} \right);$$

$$\lambda a2(x, t) := 1; \lambda r2(x, t) := \frac{1}{\lambda t2(x, t)};$$

$$\sigma r2(x, t) := \sigma a2(x, t) + 2 \cdot Cmat1 \cdot (\lambda r2(x, t)^2 - \lambda a2(x, t)^2) - 2 \cdot Cmat2 \cdot \left(\frac{1}{\lambda r2(x, t)^2} - \frac{1}{\lambda a2(x, t)^2} \right);$$

$$\sigma a2(x, t) := 0 + 2 \cdot Cmat1 \cdot (\lambda a2(x, t)^2 - \lambda r2(x, t)^2) + 2 \cdot Cmat2 \cdot \left(\frac{1}{\lambda r2(x, t)^2} - \frac{1}{\lambda a2(x, t)^2} \right);$$

$$\sigma t2(x, t) := \sigma a2(x, t) + 2 \cdot Cmat1 \cdot (\lambda t2(x, t)^2 - \lambda a2(x, t)^2) - 2 \cdot Cmat2 \cdot \left(\frac{1}{\lambda t2(x, t)^2} - \frac{1}{\lambda a2(x, t)^2} \right);$$

$$\lambda t1(x, t) := \frac{r1(x, t)}{r1nula}; \lambda t2(x, t) := \frac{r2(x, t)}{r2nula};$$

$$r2 := \sqrt{r1(x, t) \cdot r1(x, t) + (r2nula \cdot r2nula - r1nula \cdot r1nula)};$$

declare(p(x, t), Q(x, t), r1(x, t), ρ(x, t));

$$IBC := \begin{cases} p(L, t) = pvystup + \rho nula \cdot g \cdot L, Q(0, t) = Qvstup, \\ \end{cases}$$

$$\begin{aligned} p(x, 0) &= pvstup|_{t=0} - \frac{\rho nula \cdot \lambda \cdot x}{2 \cdot r1nula} \cdot \frac{Qnula \cdot Qnula}{2 \cdot Snula \cdot Snula} + \rho nula \cdot g \cdot x, Q(x, 0) \\ &= 0 \cdot Qnula, \rho(x, 0) = \rho nula, r1(x, 0) = r1nula + 0.00001 \end{aligned};$$

sys_prutokova_rovnice

$$\begin{aligned}
 &:= \left[\frac{\partial Q(x,t)}{\partial t} = \frac{S(x,t)}{\rho(x,t)} \cdot \left(-\frac{\partial p(x,t)}{\partial x} + \rho(x,t) \cdot g - \frac{\rho(x,t) \cdot \lambda}{2 \cdot r1(x,t)} \cdot \frac{Q(x,t) \cdot |Q(x,t)|}{2 \cdot S(x,t) \cdot S(x,t)} \right), \frac{\partial p(x,t)}{\partial t} \right. \\
 &= -\frac{1}{K} + \frac{\frac{1}{S(x,t)} \cdot \frac{\partial Q(x,t)}{\partial x}}{2 \cdot r1(x,t) \cdot r1(x,t) \cdot \left(Cmat1 \cdot \left(\frac{r1nula^2}{r1(x,t)^4} - \frac{r2nula^2}{r2(x,t)^4} \right) + Cmat2 \cdot \left(\frac{1}{r1nula^2} - \frac{1}{r2nula^2} \right) \right)}, \\
 &\frac{\partial p(x,t)}{\partial t} = \frac{\rho(x,t)}{K} \cdot \frac{\partial p(x,t)}{\partial t}, \\
 &\left. \frac{\partial r1(x,t)}{\partial t} = \frac{\frac{\partial p(x,t)}{\partial t}}{4 \cdot r1(x,t) \cdot \left(Cmat1 \cdot \left(\frac{r1nula^2}{r1(x,t)^4} - \frac{r2nula^2}{r2(x,t)^4} \right) + Cmat2 \cdot \left(\frac{1}{r1nula^2} - \frac{1}{r2nula^2} \right) \right)} \right];
 \end{aligned}$$

fcns_sys_prutokova_rovnice := { $Q(x,t), p(x,t), r1(x,t), \rho(x,t), u1(x,t), \lambda t1(x,t)$ };

prikaz_sys_prutokova_rovnice := *pdsolve*(*sys_prutokova_rovnice*, *IBC*, *numeric*, *time* = *t*, *range* = 0 .. *L*, *spacestep* = $\frac{1}{20}$, *timestep* = $\frac{1}{20}$);

p_q := *prikaz_sys_prutokova_rovnice*: -*plot* ($Q, x = \frac{L}{2}, t = 0..3.5, \text{numpoints} = 500$);

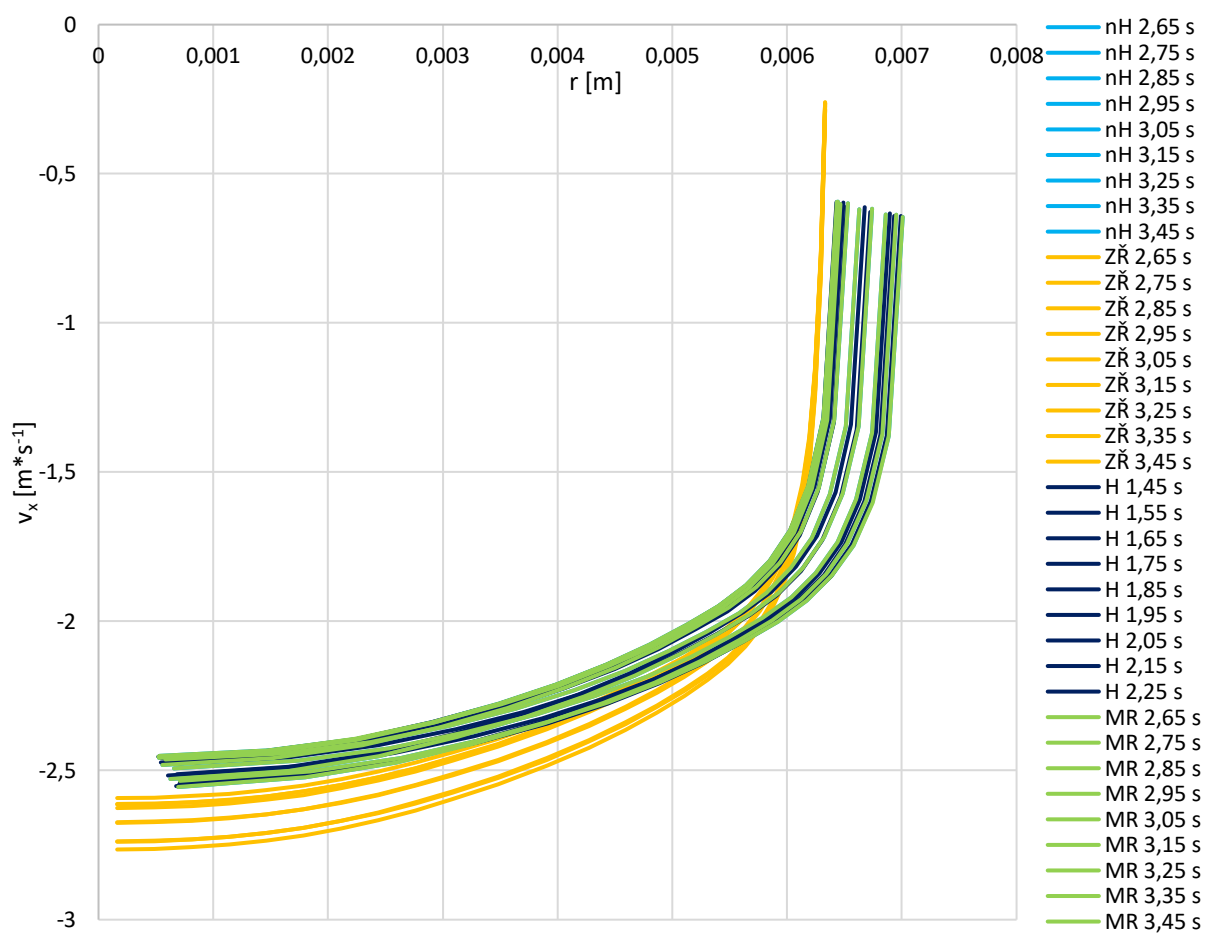
p_qv := *prikaz_sys_prutokova_rovnice*: -*value*($Q, x = \frac{L}{2}, t = 0..3.5$);

i := 1000; *p_qv*(0);

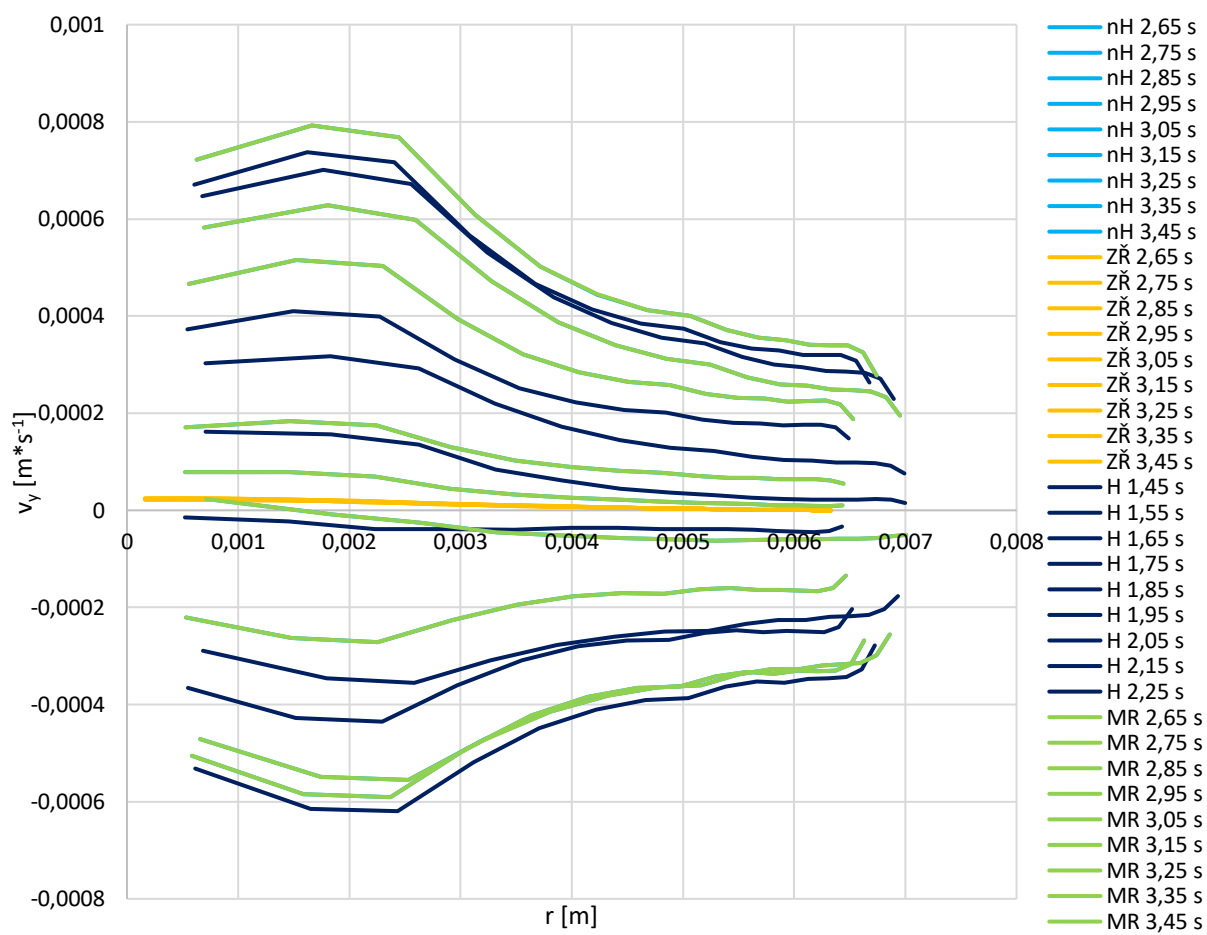
A_m := *array*(0 .. *i*); **for** *m* **to** *i* **do** (*p_qv*($\frac{m \cdot 5}{1000}$)), *writedata* (*fd*, *p_qv*($\frac{m \cdot 5}{1000}$)), *string*, *float*) **end**;

Příloha C: ZBÝVAJÍCÍ GRAFY

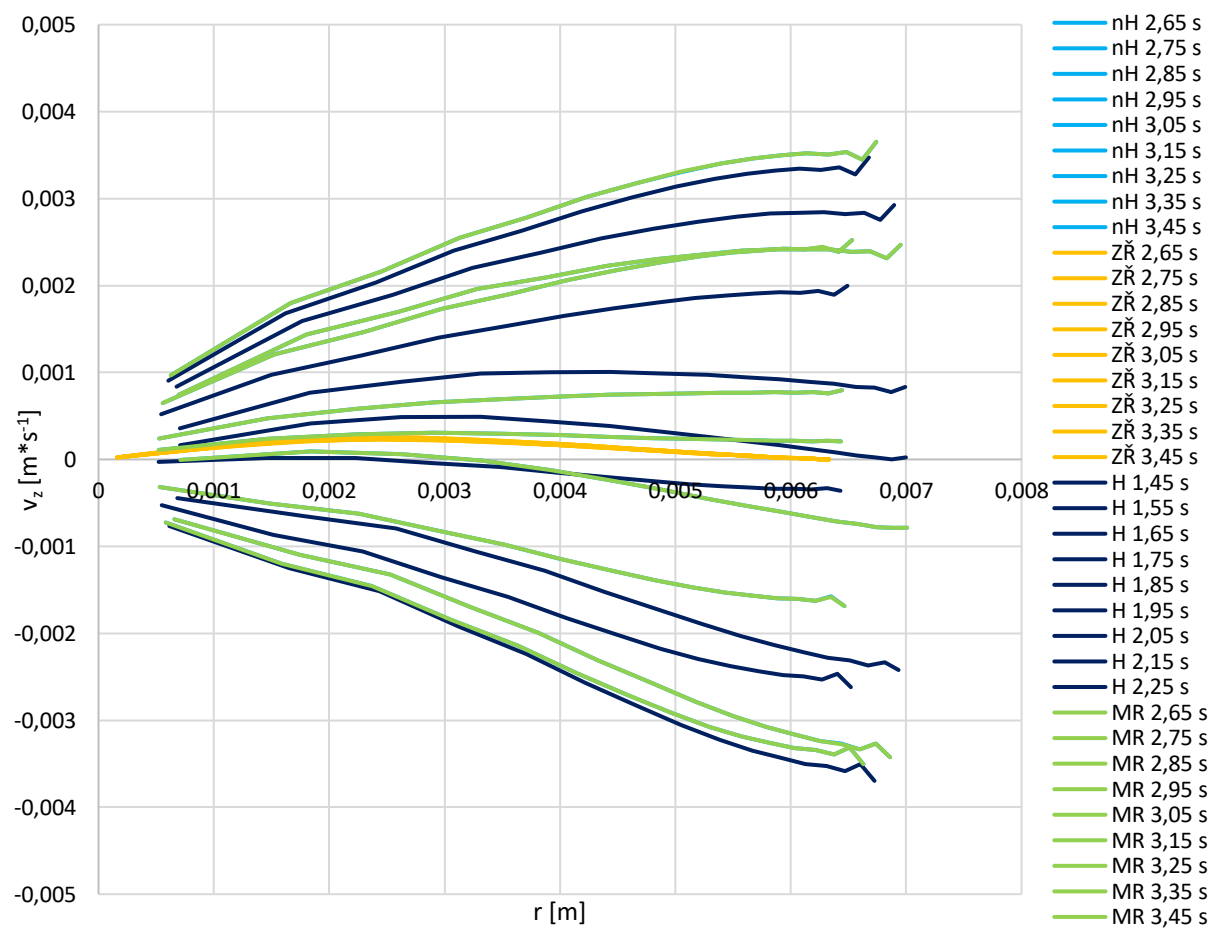
1 Rozbor proudění v trubici



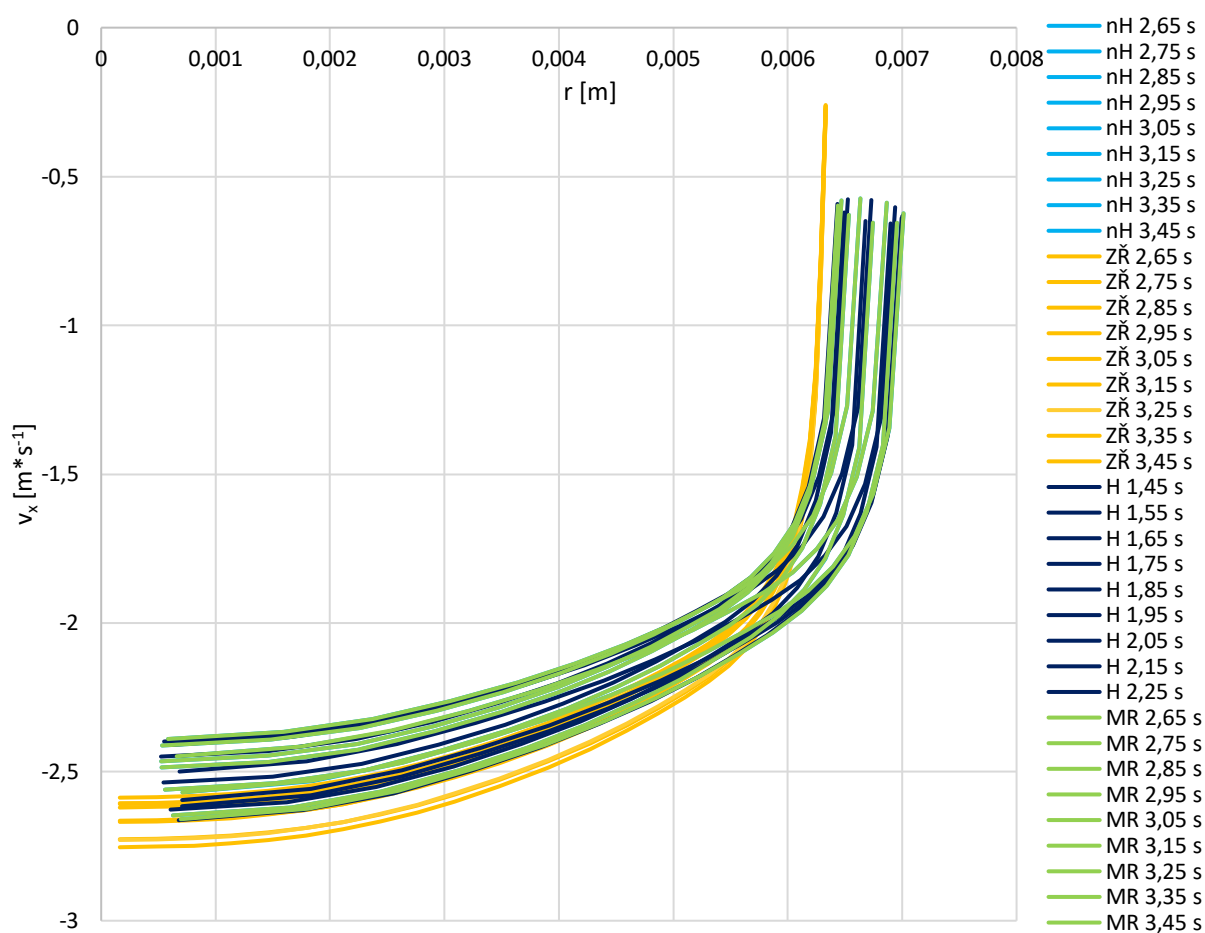
Obr. 37: Rychlostní profily v 1/2 trubice v ose x v závislosti na poloměru



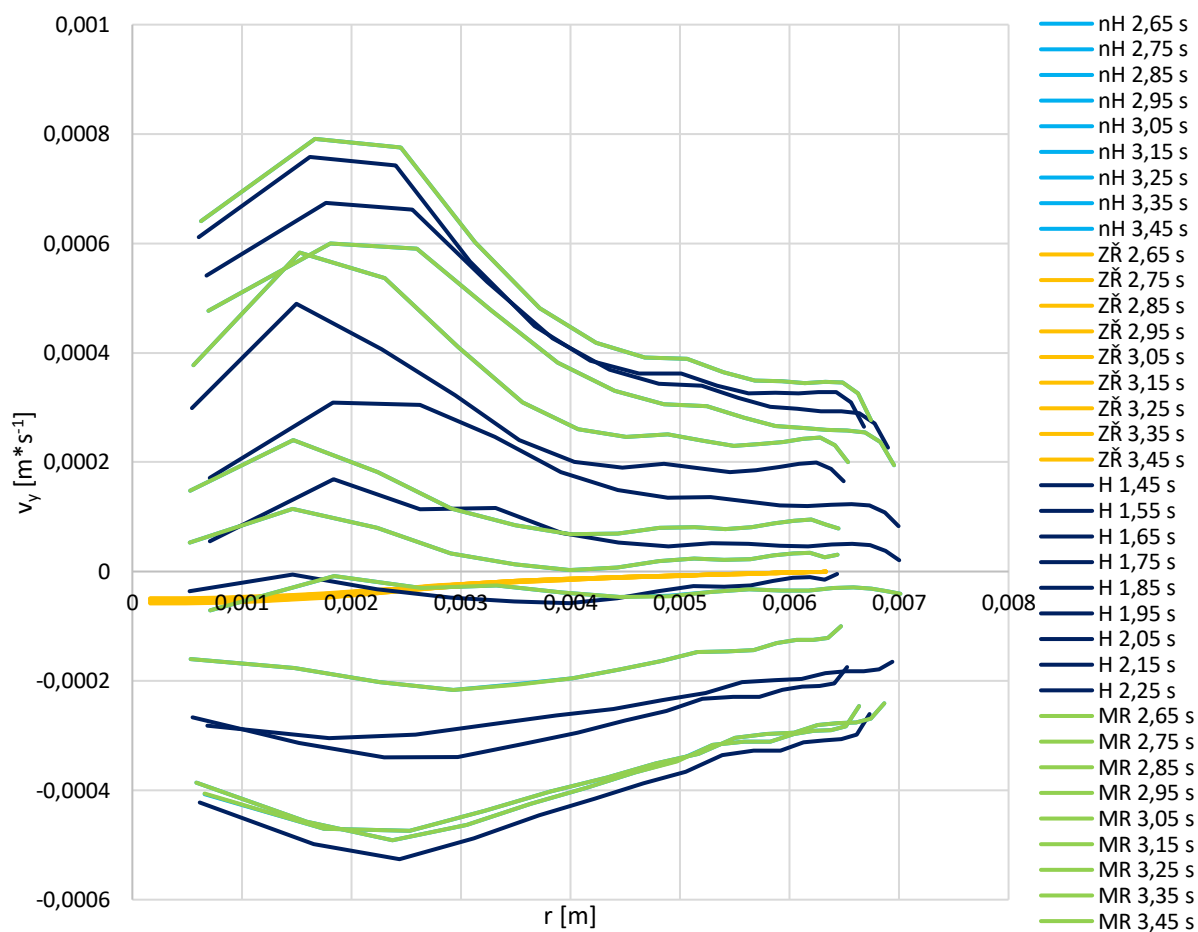
Obr. 38: Rychlostní profily v 1/2 trubice v ose y v závislosti na poloměru



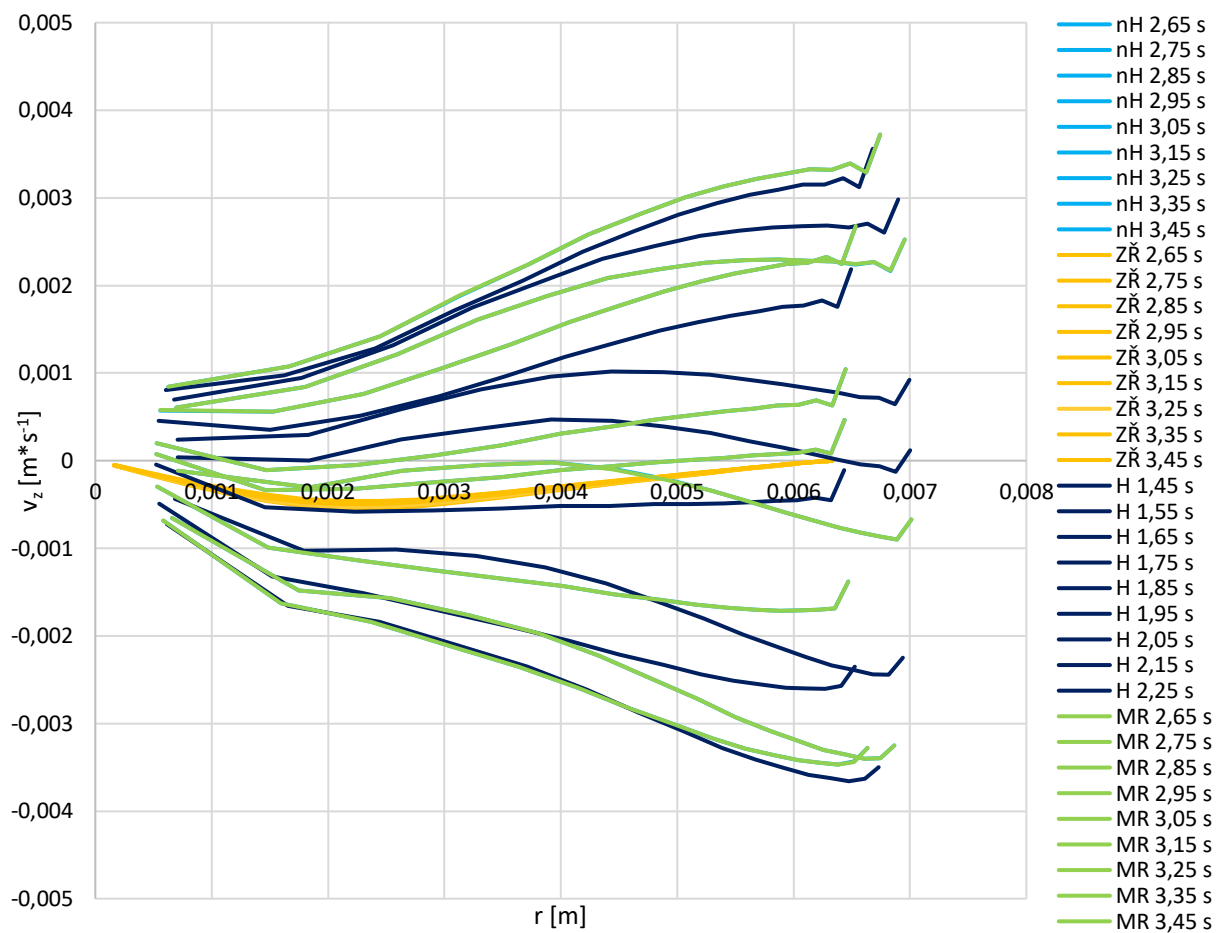
Obr. 39: Rychlostní profily v 1/2 trubice v ose z v závislosti na poloměru



Obr. 40: Rychlostní profily ve 3/4 trubice v ose x v závislosti na poloměru



Obr. 41: Rychlostní profily ve 3/4 trubice v ose y v závislosti na poloměru



Obr. 42: Rychlostní profily ve 3/4 trubice v ose z v závislosti na poloměru